

Logica per la Programmazione

Lezione 10

- ▶ Logica del Primo Ordine con **Insiemi ed Intervalli**
- ▶ Formalizzazione di Enunciati: **Array e Sequenze**

Rappresentazioni Intensionali ed Estensionali di Insiemi

- ▶ Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- ▶ Rappresentazione **estensionale** (*in extenso*) di insiemi

$$\textit{Divisori_di_30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

- ▶ Rappresentazione **intensionale** (*in inteso*) di insiemi

$$\textit{Divisori_di_30} = \{x \mid x \leq 30 \wedge (\exists n. x \times n = 30)\}$$

- ▶ Rappresentazione **intensionale per insiemi infiniti**

$$\textit{Multipli_di_7} = \{x \mid (\exists n. x = n \times 7)\}$$

Notazione per Insiemi

- ▶ Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare **insiemi di naturali in modo intensionale**:

$$Term ::= Const \mid Var \mid Flde(Term\{, Term\}, \}) \mid \{Var \mid Fbf\}$$

- ▶ Abbiamo **termini** come $\{x \mid P\}$ dove x è una variabile, e P una formula (solitamente con x libera). x è legata in $\{x \mid P\}$
- ▶ Nuovo simbolo di **predicato binario** \in , definito dalla legge:

$$y \in \{x \mid P\} \equiv P[y/x] \quad (\text{def-}\in)$$

- ▶ Nuova **costante** \emptyset , definita come

$$\emptyset = \{x \mid \mathbf{F}\}$$

Insieme Vuoto

Dimostriamo che $(\forall y. y \in \emptyset \equiv \mathbf{F})$ è valida:

$$\begin{aligned} & y \in \emptyset \text{ [Per generalizzazione]} \\ \equiv & \{(\text{Def. di } \emptyset)\} \\ & y \in \{x \mid \mathbf{F}\} \\ \equiv & \{(\text{Def. di } \in)\} \\ & \mathbf{F} \end{aligned}$$

Leggi per Insiemi: uguaglianza e sottoinsieme

- ▶ Inoltre introduciamo due **predicati binari** $=$ e \subseteq definiti dalle seguenti leggi

$$(\forall x. P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\} \quad (\text{Ins-}\equiv)$$

$$(\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\} \quad (\text{Ins-}\Rightarrow)$$

- ▶ Dimostriamo la seconda

$$\begin{aligned} & z \in \{x \mid P\} \\ \equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\ & P[z/x] \\ \Rightarrow & \quad \{(\text{Ip: } \forall x. P \Rightarrow Q), (\text{Elim-}\forall)\} \\ & Q[z/x] \\ \equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\ & z \in \{x \mid Q\} \end{aligned}$$

Uguaglianze e Disuguaglianze

- ▶ Estendiamo ora il linguaggio del primo ordine con i **predicati binari** \leq e \geq (con l'ovvio significato).
- ▶ I predicati $=$, \leq e \geq e soddisfano i **seguenti assiomi** (nei quali la quantificazione universale è implicita):
 - ▶ $x = x$ (**riflessività= $=$**)
 - ▶ $x = y \Rightarrow y = x$ (**simmetria= $=$**)
 - ▶ $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$ (**transitività= $=$**)

 - ▶ $x \leq x$ (**riflessività= \leq**)
 - ▶ $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$ (**antisimmetria= \leq**)
 - ▶ $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (**transitività= \leq**)
 - ▶ $x \leq y \vee y \leq x$ (**totalità= \leq**)

 - ▶ $x \geq y \equiv y \leq x$ (**def= \geq**)

Un po' di Terminologia...

- ▶ Una **relazione binaria** R su un insieme A ($R \subseteq A \times A$) è una **relazione di equivalenza** se è
 - ▶ **riflessiva**: $x R x$
 - ▶ **simmetrica**: $x R y \Rightarrow y R x$
 - ▶ **transitiva**: $(x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow (x R z)$
- ▶ **Esempio**: l'uguaglianza $=$, l'equivalenza \equiv
- ▶ Una **relazione binaria** è una **relazione di ordinamento** se è
 - ▶ **riflessiva**, **transitiva** e **anti-simmetrica**

$$(x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow (x = z)$$

- ▶ **Esempio**: inclusione \subseteq tra insiemi, \leq su numeri naturali
- ▶ Una **relazione di ordinamento** è **totale** se
 - ▶ $(x R y) \vee (y R x)$
- ▶ **Esempio**: \leq su numeri naturali

Intervalli: Notazione e Definizioni

- ▶ Introduciamo le seguenti **abbreviazioni sintattiche** dati $a, b \in \mathbb{N}$:
 - ▶ $[a, b] = \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$ **intervallo chiuso**
 - ▶ $[a, b) = \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$ **intervallo semiaperto a destra**
 - ▶ $(a, b] = \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$ **intervallo semiaperto a sinistra**
 - ▶ $(a, b) = \{x \mid a < x \wedge x < b\}$ **intervallo aperto**
- ▶ Definizione di **relazioni ausiliarie**:

$$x \neq y \equiv \neg(x = y) \quad (\text{def-} \neq)$$

$$x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y \quad (\text{def-} <)$$

$$x > y \equiv x \geq y \wedge x \neq y \quad (\text{def-} >)$$

Quantificazione ristretta ad un insieme: Domini

- ▶ Spesso la **quantificazione** (**universale o esistenziale**) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$

$$(\exists x.P \wedge Q)$$

- ▶ In queste formule, la formula **P** è il **dominio del quantificatore**
- ▶ Si introducono le **seguenti abbreviazioni**:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \quad \text{viene scritta come} \quad (\forall x : P.Q)$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \quad \text{viene scritta come} \quad (\exists x : P.Q)$$

- ▶ **Attenzione:** queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.
- ▶ **Caso Particolare:** Il dominio **P** è **vuoto** se $P[v/x] \equiv \mathbf{F}$ per ogni elemento v del dominio di interpretazione (o se $\neg(\exists x.P) \equiv \mathbf{T}$)

Formule Vacuamente Vere

- ▶ Una formula **quantificata universalmente** è **vacuamente** vera se il **dominio è vuoto**.
- ▶ Mostriamo che se P è vuoto, allora $(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \mathbf{T}$ indipendentemente da Q .

$$\forall x.P \Rightarrow Q$$

$$\equiv \{ \text{Ip: } P \text{ vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{F} \}$$

$$\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q$$

$$\equiv \{ \mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T} \}$$

$$\forall x.\mathbf{T}$$

- ▶ Due casi:
 - ▶ Se il dominio di interpretazione **non è vuoto allora per (costante)**: $\forall x.\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$.
 - ▶ Se il dominio di interpretazione **è vuoto**, allora $\forall x.\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ per la definizione di semantica

Formule Vacuamente Vere

- ▶ Dualmente una formula **quantificata esistenzialmente** è **falsa** se il **dominio è vuoto**
- ▶ Mostriamo infatti che la formula $(\exists x.P \wedge Q)$ è falsa se P è vuoto, indipendentemente da Q .

$$\begin{aligned}
 & (\exists x.P \wedge Q) \\
 \Rightarrow & \quad \{(\exists:\wedge)\} \\
 & (\exists x.P) \wedge (\exists x.Q) \\
 \equiv & \quad \{\text{Ip: } P \text{ vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{F}\} \\
 & (\exists x.\mathbf{F}) \wedge (\exists x.Q) \\
 \equiv & \quad \{(\text{costante}) \text{ se dominio non vuoto, semantica altrimenti}\} \\
 & \mathbf{F} \wedge \exists x.Q \\
 \equiv & \quad \{(\text{zero})\} \\
 & \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

Estensione delle Leggi dei Quantificatori alle Formule con Domini

- ▶ Molte delle leggi per i quantificatori valgono anche quando si quantifica su di un dominio esplicito.
- ▶ Vediamone due (le altre sono sulla dispensa):
 - ▶ $(\forall x.R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x.R \Rightarrow P) \wedge (\forall x.R \Rightarrow Q)$ $(\forall : \wedge)$
 - ▶ $\neg(\exists x.R \wedge P) \equiv (\forall x.R \Rightarrow \neg P)$ (De Morgan)

Notazione per gli Intervalli

Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo I che noi eviteremo:

- ▶ la formula $(\forall x.x \in I \Rightarrow Q)$ si scrive come $(\forall x \in I.Q)$ o $(\forall x : x \in I.Q)$
- ▶ analogamente la formula $(\exists x.x \in I \wedge Q)$ si scrive come $(\exists x \in I.Q)$ o $(\exists x : x \in I.Q)$

Leggi per Quantificazioni su Domini

Sia k un elemento del dominio di interpretazione. Queste leggi mostrano come ridurre la quantificazione sul dominio P ad un dominio più piccolo

$$(P \wedge x \neq k):$$

$$(\forall x. P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } \neg P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x. P \wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x. P \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\exists x. P \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } \neg P[k/x] \end{cases}$$

Dimostrazione Legge per il Quantificatore Universale (1)

$$\begin{aligned}
& (\forall x. P \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Terzo Escluso}), (\text{Unità})\} \\
& (\forall x. P \wedge (x = k \vee x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Distrib.})\} \\
& (\forall x. (P \wedge x = k) \vee (P \wedge x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Dominio})\} \\
& (\forall x. P \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Leibniz})\} \\
& (\forall x. P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)
\end{aligned}$$

Dimostrazione Legge per il Quantificatore Universale (2)

Procediamo **per casi** a dimostrare la legge:

► $P[k/x] \equiv \mathbf{T}$

$$\begin{aligned}
 & (\forall x. P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
 \equiv & \quad \{\text{Ip: } P[k/x] \equiv \mathbf{T}, (\text{Unit\`a})\} \\
 & (\forall x. x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
 \equiv & \quad \{(\text{Singoletto})\} \\
 & Q[k/x] \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)
 \end{aligned}$$

► $P[k/x] \equiv \mathbf{F}$

$$\begin{aligned}
 & (\forall x. P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
 \equiv & \quad \{\text{Ip: } P[k/x] \equiv \mathbf{F}, (\text{Zero})\} \\
 & (\forall x. \mathbf{F} \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
 \equiv & \quad \{\mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T}, (\text{costante}), (\text{unit\`a})\} \\
 & (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)
 \end{aligned}$$

Leggi per Quantificazioni su Intervalli (1)

Le leggi viste in precedenza possono essere specializzate tal caso in cui il dominio è un intervallo. Vediamo il caso in cui $x \in [a, b]$:

$$(\forall x. x \in [a, b] \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x. x \in [a, b] \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b] \\ (\forall x. x \in [a, b] \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a, b] \end{cases}$$

$$(\exists x. x \in [a, b] \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\exists x. x \in [a, b] \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b] \\ (\exists x. x \in [a, b] \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a, b] \end{cases}$$

Leggi per Quantificazioni su Intervalli (2)

- ▶ Altre leggi molto utili nel caso in cui il dominio sia una formula $x \in [a, b]$ e l'elemento considerato sia proprio l'estremo dell'intervallo destro o sinistro



$$(\forall x. x \in [a, b] \Rightarrow Q) \equiv (\forall x. x \in [a, b) \Rightarrow Q) \wedge Q[b/x] \text{ se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\forall x. x \in [a, b] \Rightarrow Q) \equiv (\forall x. x \in (a, b] \Rightarrow Q) \wedge Q[a/x] \text{ se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$



$$(\exists x. x \in [a, b] \wedge Q) \equiv (\exists x. x \in [a, b) \wedge Q) \vee Q[b/x] \text{ se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

$$(\exists x. x \in [a, b] \wedge Q) \equiv (\exists x. x \in (a, b] \wedge Q) \vee Q[a/x] \text{ se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

Specifiche con Array e Sequenze

- ▶ Un array a di lunghezza n è rappresentato da una **funzione dall'intervallo** $[0, n) = \{0, 1, \dots, n - 1\}$ ad \mathbb{N}
- ▶ **Notazione:** $a[i]$ indica il valore i -esimo della funzione (array) a è
- ▶ **Esempio:** $a = \{ \langle 0, 45 \rangle, \langle 1, 23 \rangle, \langle 2, 10 \rangle, \langle 3, 16 \rangle \}$

45	23	10	16
----	----	----	----

- ▶ Notazione: il valore i -esimo della funzione (array) a è indicato come $a[i]$
- ▶ Notazione: **il primo elemento ha posizione/indice 0:** $a[0] = 45$

Esercizi di Formalizzazione (1)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n , fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

- ▶ a è un array con tutti gli elementi uguali a 0

$$(\forall i. i \in [0, n) \Rightarrow a[i] = 0)$$

- ▶ per ogni elemento di a esiste un elemento di b uguale o più grande

$$(\forall i. i \in [0, n) \Rightarrow (\exists j. j \in [0, n) \wedge a[i] \leq b[j]))$$

Esercizi di Formalizzazione (2)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n , fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

1. a rappresenta una funzione monotona crescente
2. m è il massimo dell'array a
3. m è l'indice del massimo dell'array a
4. a ha tutti elementi distinti
5. a ha tutti elementi distinti e b è l'array a ordinato in senso crescente.