Logica per la Programmazione

Lezione 5

- Dimostrazione di implicazioni tautologiche
- Leggi per l'implicazione
- Principio di sostituzione

Dimostrazione di Tautologie

- Il sistema di dimostrazione che abbiamo presentato consente di dimostrare equivalenze tautologiche
  - Si usano leggi che sono equivalenze tautologiche
  - *Regola di Inferenza*: Principio di Sostituzione
- Abbiamo visto dimostrazioni di equivalenze (del tipo $p \equiv q$) usando una catena di equivalenze:

$$p \equiv ... \equiv q$$

- Se la formula p da dimostrare non è un'equivalenza, si deve mostrare equivalente a **T**:

$$p \equiv ... \equiv T$$

- Se la formula è una tautologia allora esiste una dimostrazione anche se il meccanismo di costruzione non è automatico

Verso altre Tecniche di Dimostrazione

- Estenderemo il sistema di dimostrazione introducendo:
  - Nuove leggi che sono implicazioni tautologiche
  - *Regola di Inferenza*: il Principio di Sostituzione esteso al caso delle implicazioni tautologiche
- Intuitivamente una formula del tipo $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ si può dimostrare anche usando una catena di equivalenze/implicazioni:

$$\mathbf{p} \equiv \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \equiv \mathbf{q}$$

- **In questo modo otterremo una maniera alternativa e più naturale per dimostrare implicazioni tautologiche**

Alcune Importanti Leggi Derivate

- Hanno un'implicazione come connettivo principale (già viste e già dimostrate!!!!)
-
  - (Modus Ponens): $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$

    $$((P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q)$$

  - (Sempl-$\wedge$): $P \wedge Q \Rightarrow P$

    $$((P \wedge Q) \Rightarrow P)$$

  - (Intro-$\vee$): $P \Rightarrow P \vee Q$

    $$(P \Rightarrow (Q \vee P))$$

- Perchè non (Sempl-$\vee$) e (Intro-$\wedge$)?
- Come si possono usare come giustificazioni in prove di implicazioni?

Correttezza di Modus Ponens e Sempl-$\wedge$

$$
\begin{array}{ll}
 & P \wedge (\underline{P \Rightarrow Q}) \Rightarrow Q \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \underline{P \wedge (\neg P \vee Q)} \Rightarrow Q \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & \underline{P \wedge Q \Rightarrow Q} \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\ \} \\
 & \underline{\neg(P \wedge Q)} \vee Q \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg P \vee \underline{\neg Q \vee Q} \\
\equiv & \quad \{(\text{Terzo Escluso})\} \\
 & \underline{\neg P \vee \mathbf{T}} \\
\equiv & \quad \{(\text{Zero})\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

Verso la Dimostrazione di Implicazioni Tautologiche

$$
\begin{array}{lll}
 & P_1 & \\
\equiv & & \{\text{ giustificazione}\} \\
 & \dots & \\
\equiv & & \{\text{ giustificazione}\} \\
 & \dots & \\
 & P & \\
\Rightarrow & & \{P \Rightarrow Q\} \\
 & Q & \\
 & \dots & \\
\equiv & & \{\text{ giustificazione}\} \\
 & \dots & \\
\equiv & & \{\text{ giustificazione}\} \\
 & P_k &
\end{array}
$$

- Sostituendo P con Q dato che $P \Rightarrow Q$ è una legge (tautologia) otteniamo una dimostrazione che $P_1 \Rightarrow P_k$ è tautologia !!!!

Esempio - Tollendo Ponens

- Dimostriamo una legge derivata (Tollendo Ponens)

$$(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$$

-

$$\begin{array}{lll} & \underline{(P \vee Q) \wedge \neg P} & \\ \equiv & & \{(\text{Doppia Negazione}), (\text{Complemento})\ \} \\ & \underline{Q \wedge \neg P} & \\ \Rightarrow & & \{(\text{Sempl.-}\wedge)\} \\ & Q & \end{array}$$

- Si noti che abbiamo applicato (Sempl.-$\wedge$) ($A \ \wedge \ B \Rightarrow A$) all'intera proposizione $Q \wedge \neg P$

Verso uno Schema di Dimostrazione Generale

$$
\begin{array}{lll}
 & P_1 & \\
\equiv & & \{\text{giustificazione}\} \\
 & \dots & \\
\equiv & & \{\text{giustificazione}\} \\
 & R & \\
\Rightarrow & & \{P \Rightarrow Q\} \\
 & R[Q/P] & \\
\equiv & & \{\text{ giustificazione}\} \\
 & \dots & \\
\equiv & & \{\text{ giustificazione}\} \\
 & P_k &
\end{array}
$$

- P $\Rightarrow$Q è una legge (tautologia) e $R[Q/P]$ indica la formula R in cui P viene sostituito con Q

Vale un Principio di Sostituzione per l'Implicazione?

- Il principio di sostituzione stabilisce che

  "Se $P \equiv Q$ allora $R \equiv R[Q/P]$"

- È valido un analogo principio di sostituzione per l'implicazione?

  "Se $P \Rightarrow Q$ allora $R \Rightarrow R[Q/P]$" (???)

- In generale **NO**.

Esempio

- Applichiamo la stessa istanza della legge (Sempl-$\wedge$) ($U \wedge V \Rightarrow U$) a due formule diverse
- Quali delle seguenti deduzioni sono corrette?

$$\begin{array}{lll} & Z \Rightarrow U \wedge V & \\ \Rightarrow & & \text{(Sempl-}\wedge\text{)} \\ & Z \Rightarrow U & \\ & & OK \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & U \wedge V \Rightarrow Z & \\ \Rightarrow & & \text{(Sempl-}\wedge\text{)} \\ & U \Rightarrow Z & \\ & & NO \end{array}$$

Analogia con Disuguaglianze Algebriche

- Una **situazione del tutto analoga si incontra nella dimostrazione di disuguaglianze algebriche**
- Quali delle seguenti deduzioni sono corrette?

$$\begin{array}{ll} & a - c \\ \leq & \qquad\qquad \{(a \leq b)\} \\ & b - c \\ & \qquad\qquad OK \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & a - c \\ \leq & \qquad\qquad \{(c \leq d)\} \\ & a - d \\ & \qquad\qquad NO \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & a - c \\ \geq & \qquad\qquad \{(c \leq d)\} \\ & a - d \\ & \qquad\qquad OK \end{array}$$

- Si noti che **a** compare **positivamente** in **(a - c)**, ma **c** vi compare **negativamente**. Per questo nel secondo caso il segno di disuguaglianza va invertito.

Occorrenze Positive e Negative

- Una situazione del tutto analoga si incontra nel caso delle formule proposizionali
- Il connettivo $\neg$ gioca il ruolo del $-$ (torniamo al caso precedente)!!!
- Per formulare il principio di sostituzione introduciamo una nozione sintattica: se una formula P occorre positivamente o negativamente in una formula R

Occorrenze Positive e Negative (1)

Consideriamo il caso in cui la formula P compare in una formula al livello più alto

- La proposizione P occorre *positivamente* in

$$P \quad P \vee Q \quad P \wedge Q \quad Q \Rightarrow P$$

- Mentre P occorre *negativamente* in

$$\neg P$$
$$P \Rightarrow Q \quad \text{(si ricordi che } P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q\text{)}$$

Occorrenze Positive e Negative (2)

- Se la formula P compare in una formula R ad un livello più profondo, si contano le occorrenze negative da P fino alla radice di R:
  - se sono pari allora P occorre positivamente in R
  - se sono dispari allora P occorre negativamente in R
- Attenzione: P può occorrere sia negativamente che positivamente in R

Esempi

- $$\underline{P} \Rightarrow (\underline{P} \Rightarrow Q)$$

  Entrambe le occorrenze di **P** compaiono negativamente, mentre l' unica occorrenza di **Q** compare positivamente. Notare che la proposizione analizzata è infatti equivalente a

  $$\neg P \vee (\neg P \vee Q)$$

- $$\underline{(\underline{P} \Rightarrow \underline{P})} \Rightarrow Q$$

  Una occorrenza di **P** compare negativamente mentre l'altra positivamente. Come prima l'unica occorrenza di **Q** compare positivamente.
  Notare che la proposizione analizzata è infatti equivalente a

  $$(\neg\neg P \wedge \neg P) \vee Q$$

Principio di Sostituzione per l'Implicazione

- Se abbiamo stabilito che
  - $P \Rightarrow Q$
  - P occorre **positivamente** in R

  allora vale

$$\mathbf{R} \Rightarrow \mathbf{R}[\mathbf{Q}/\mathbf{P}]$$

- Se abbiamo stabilito che
  - $P \Rightarrow Q$
  - P occorre **negativamente** in R

  allora vale

$$\mathbf{R} \Leftarrow \mathbf{R}[\mathbf{Q}/\mathbf{P}]$$

Occorrenze Positive e Negative: Esempi

- Come occorre P nelle seguenti proposizioni?
  - $(P \land P \land R) \lor S$
  - $Q \Rightarrow (P \land R)$
  - $P \lor Q \Rightarrow (R \Rightarrow S)$
  - $(P \lor Q \Rightarrow R) \Rightarrow S$
  - $P \land Q \Rightarrow P \lor Q$
  - $\neg((P \land P \land R) \lor S)$
- Se ci sono più occorrenze di P, indicheremo esplicitamente quale ci interessa.
  - $\mathbf{P} \Rightarrow (Q \lor P \Rightarrow Q \lor S)$
  - $P \Rightarrow (Q \lor \mathbf{P} \Rightarrow Q \lor S)$

Dimostrazione di Implicazioni: Esempi

- Dimostriamo la formula

$$(P \Rightarrow Q \wedge R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$$

- Partiamo dalla premessa arrivando alla conseguenza

$$\begin{array}{ll} & P \Rightarrow \underline{Q \wedge R} \\ \Rightarrow & \qquad\qquad \{(\text{Sempl.-}\wedge),\, Q \wedge R \;\Rightarrow\; Q\} \\ & P \Rightarrow Q \end{array}$$

- $Q \wedge R$ occorre positivamente in $P \Rightarrow Q \wedge R$

Dimostrazione di Implicazioni: Esempi

- Dimostriamo la formula

$$(P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

- Partiamo dalla conseguenza arrivando alla premessa

$$\begin{array}{lll} & \underline{P} \Rightarrow R & \\ \Leftarrow & & \{(\text{Intro.-}\vee), \text{P} \ \Rightarrow \text{P} \vee \text{Q}\} \\ & P \vee Q \Rightarrow R & \end{array}$$

- P occorre negativamente in $P \Rightarrow R$

Dimostrazione di Implicazioni: Esempi

- Dimostriamo la formula $(P \vee Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
- Partiamo dalla premessa $(P \vee Q \Rightarrow R)$ per arrivare alla conseguenza $(P \Rightarrow R)$

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{(P \vee Q \Rightarrow R)} \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-} \Rightarrow)\} \\
 & \underline{\neg(P \vee Q)} \vee R \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & (\underline{\neg P \wedge \neg Q}) \vee R \\
\Rightarrow & \qquad \{(\text{Sempl-}\wedge)\} \\
 & \underline{\neg P \vee R} \\
\equiv & \quad \{ (\text{elim-} \Rightarrow)\} \\
 & P \ \Rightarrow \ R
\end{array}
$$

- $(\neg P \wedge \neg Q)$ occorre positivamente in $(\neg P \wedge \neg Q) \vee R$

Il Principio di Risoluzione

- (Risoluzione): $(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) \Rightarrow (Q \vee R)$
- Questa legge permette di semplificare una formula in **forma normale congiuntiva**. È il meccanismo di calcolo alla base della **programmazione logica**.

$$
\begin{array}{ll}
 & (\underline{P \vee Q}) \wedge (\underline{\neg P \vee R}) \\
\equiv & \quad \{ \text{(Elim.-}\Rightarrow\text{), 2 volte} \} \\
 & \underline{(\neg Q \;\Rightarrow\; P) \wedge (P \;\Rightarrow\; R)} \\
\Rightarrow & \quad \{ \text{(Transitività-}\Rightarrow\text{), occorrenza positiva} \} \\
 & (\underline{\neg Q \;\Rightarrow\; R}) \\
\equiv & \quad \{ \text{(Elim.-}\Rightarrow\text{)} \} \\
 & Q \vee R
\end{array}
$$

- Quindi la risoluzione corrisponde alla transitività dell'implicazione

Esempio

Dimostriamo la formula $(Q \vee S) \wedge (Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$ partendo dalla premessa $(Q \vee S) \wedge (Q \Rightarrow \neg P)$ ed arrivando alla conclusione $P \Rightarrow S$

$$
\begin{array}{ll}
 & (Q \vee S) \wedge (\underline{Q \Rightarrow \neg P}) \\
\equiv & \quad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
 & \underline{(Q \vee S) \wedge (\neg Q \vee \neg P)} \\
\Rightarrow & \quad \{(\text{Risoluzione}), \text{ occorrenza positiva}\} \\
 & \underline{S \vee \neg P} \\
\equiv & \quad \{(\text{Elim.-}\Rightarrow)\} \\
 & P \;\Rightarrow\; S
\end{array}
$$

Schemi di Dimostrazione

Per dimostrare che $P \Rightarrow Q$ è una tautologia:

- Dimostrare che la formula $P \Rightarrow Q$ è equivalente a T
  - dimostrazioni molto lunghe
  - solo leggi per $\equiv$!!!!
- Partire da P arrivando a Q

$$\mathbf{P} \equiv \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \equiv \mathbf{Q}$$

  - nel caso dei passaggi $\Rightarrow$ controllare che la formula sostituita occorra positivamente
- Partire da Q arrivando a P

$$\mathbf{Q} \equiv \ldots \Leftarrow \ldots \Leftarrow \ldots \equiv \mathbf{P}$$

  - nel caso dei passaggi $\Rightarrow$ controllare che la formula sotituita occorra negativamente
  - difficile (solo esperti)!!!
- Attenzione a non mescolare le tre tecniche contemporaneamente

Forme Normali

- Usando le leggi ogni proposizione può essere trasformata in una *forma normale* Esistono due tipi:
  - Forma normale **congiuntiva**

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots) \wedge (q_1 \vee q_2 \vee \ldots) \wedge \ldots$$

  - Forma normale **disgiuntiva**

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots) \vee (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots) \vee \ldots$$

- dove $p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ sono letterali (variabili proposizionali *eventualmente negate*)
- Utili per dimostrare equivalenza di formule, riducendole in forma normale e verificando se sono equivalenti
- Spesso ridurre a forma normale aumenta la dimensione della formula, perché bisogna usare distributività