Logica per la Programmazione

Lezione 7

- Logica del Primo Ordine
  - Motivazioni
  - Sintassi
  - Interpretazione
  - Un esempio informale di semantica

Limiti del Calcolo Proposizionale

- Nella formalizzazione di enunciati dichiarativi gli **enunciati atomici** non hanno struttura (sono rappresentati da variabili proposizionali)
- Esempio **"Alberto va al cinema con Bruno o va al teatro con Carlo** " Introduciamo 4 proposizioni atomiche:
  - AC $\equiv$ Alberto va al cinema
  - BC $\equiv$ Bruno va al cinema
  - AT $\equiv$ Alberto va al teatro
  - CT $\equiv$ Carlo va al teatro
- Formula proposizionale: $\boxed{(AC \wedge BC) \vee (AT \wedge CT)}$
- Tuttavia, "Alberto", "Bruno", ... "cinema" ..., gli individui del nostro discorso e le relazioni tra di essi ("andare al") scompaiono...

Limiti del Calcolo Proposizionale (2)

Le formule proposizionali possono descrivere **relazioni logiche tra un numero finito di enunciati**, ma

- Vorremmo esprimere proprietà di un' **infinità di individui**:
  - "tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi"
    In CP(?) ("4 non è primo") $\land$ ("6 non è primo") $\land$ ... **NO!**
  - "esiste almeno un numero naturale maggiore di due che non è primo"
    In CP(?) ("3 non è primo") $\lor$ ("4 non è primo") $\lor$ ... **NO!**
- Vorremmo poter esprimere **proprietà "generali"** come
  "se x è pari allora x+1 è dispari"
  ... e riconoscere che da esse derivano proprietà specifiche come
  "se 4 è pari allora 5 è dispari"

Limiti del Calcolo Proposizionale (3)

Anche se descriviamo proprietà di un numero finito di enunciati vorremmo descriverli in maniera **compatta**

- **"tutti gli studenti di LPP vanno al cinema"**
  In CP(?) $S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge S_{150}$
- **"tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema"**
  In CP(?)

$$\begin{array}{c}
(\neg S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge S_{150}) \vee \\
(S_1 \wedge \neg S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge S_{150}) \vee \\
(S_1 \wedge S_2 \wedge \neg S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge S_{150}) \vee \\
(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \neg S_4 \ldots \wedge S_{150}) \vee \\
\ldots \\
(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge \neg S_{150})
\end{array}$$

Verso la Logica del Primo Ordine

- La **Logica del Primo Ordine** (LPO) estende (include) il **Calcolo Proposizionale**
- Con le formule di LPO
  - si possono denotare/rappresentare esplicitamente gli elementi (gli individui) del **dominio di interesse** (usando i **termini**)
  - si possono esprimere **proprietà** di individui e **relazioni** tra due o più individui (usando i **predicati**)
  - si può **quantificare** una formula, dicendo che vale **per almeno** un individuo, o **per tutti** gli individui (usando i **quantificatori**)

La Logica del Primo Ordine

- Presenteremo la **Sintassi**, la **Semantica** ed il **Sistema di Dimostrazioni**
- La **Semantica** di una formula di LPO è sempre un valore booleano assegnato in base ad una Interpretazione (ma determinato in modo molto più complesso!!!!)
- Come per il Calcolo Proposizionale, ci interessano le formule che sono "sempre vere" (**formule valide** analoghe alle **tautologie**)
- **Non esistono tabelle di verità**: per vedere se una formula à valida occorre dimostrarlo (e non sempre è possibile trovare una dimostrazione)
- Useremo formule della LPO per formalizzare enunciati dichiarativi

Espressività della Logica del Primo Ordine

Esempi (li analizzeremo meglio in seguito):

- Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi:

$$(\forall x.pari(x) \land x > 2 \Rightarrow \neg primo(x))$$

- Esiste almeno un numero naturale maggiori di due che non è primo

$$(\exists x.x > 2 \land \neg primo(x))$$

- Se x è pari allora x+1 è dispari (*) $(\forall x.pari(x) \Rightarrow dispari(x+1))$
- (*) implica "se 4 è pari allora 5 è dispari"

$$(\forall x.pari(x) \Rightarrow dispari(x+1)) \Rightarrow (pari(4) \Rightarrow dispari(5))$$

Logica del Primo Ordine: commenti

In LPO troviamo due categorie sintattiche e semantiche differenti

- i **termini** che sono passati come argomenti dei predicati e denotano elementi del dominio di riferimento
- le **formule** costruite a partire dai predicati predicati e che assumono valore booleano

La Sintassi della Logica del Primo Ordine: Alfabeto

- Un **alfabeto** $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ del primo ordine comprende:
  - Un insieme $\mathcal{V}$ di simboli di **variabile**
  - Un insieme $\mathcal{C}$ di simboli di **costante**
  - Un insieme $\mathcal{F}$ di simboli di **funzione**, ognuno con la sua **arietà** (o **numero di argomenti**)
  - Un insieme $\mathcal{P}$ di simboli di **predicato**, ognuno con la sua **arietà** (eventualmente 0)
- I simboli $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv, \ \Leftarrow$ (**connettivi logici**)
- I simboli $\forall, \exists$ (**quantificatori**)
- I simboli ( ) [parentesi] , [virgola] . [punto]

La Sintassi della Logica del Primo Ordine: la Grammatica

Estende la grammatica del Calcolo Proposizionale con nuove produzioni

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{Fbf} & ::= & \\
 & & \mathit{Fbf} \equiv \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \wedge \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \vee \mathit{Fbf} \mid \\
 & & \mathit{Fbf} \Rightarrow \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \Leftarrow \mathit{Fbf} \\
 & & \mathit{Atom} \mid \neg \mathit{Atom} \\
\mathit{Atom} & ::= & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid (\mathit{Fbf}) \mid (\mathit{FbfQuant}) \mid \mathit{Pred} \\
\mathit{FbfQuant} & ::= & (\forall \mathit{Var}.\mathit{Fbf}) \mid (\exists \mathit{Var}.\mathit{Fbf}) \\
\mathit{Pred} & := & \mathit{PIde} \mid \mathit{PIde}(\mathit{Term}\{, \mathit{Term}\}) \\
\mathit{Term} & ::= & \mathit{Const} \mid \mathit{Var} \mid \mathit{FIde}(\mathit{Term}\{, \mathit{Term}\})
\end{array}
$$

dove

- $\mathit{Var} \in \mathcal{V}$ è un simbolo di **variabile**
- $\mathit{Const} \in \mathcal{C}$ è un simbolo di **costante**
- $\mathit{FIde} \in \mathcal{F}$ è un simbolo di **funzione**
- $\mathit{PIde} \in \mathcal{P}$ è un simbolo di **predicato** o un **simbolo proposizionale**

Sintassi della Logica del Primo Ordine: i Termini

- I termini dal punto di vista semantico denotano "elementi del dominio di interesse" ("individui") e sono definiti dalla categoria sintattica *Term*:

$$Term \quad ::= \quad Const \mid Var \mid FIde(Term\{, Term\})$$

- Fissato un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ possiamo anche definire la sintassi dei termini induttivamente
-
    - Quindi i termini sono definiti induttivamente nel modo seguente:
        - Ogni costante $c \in \mathcal{C}$ è un termine
        - Ogni variabile $x \in \mathcal{V}$ è un termine
        - Se $f \in \mathcal{F}$ è un simbolo di funzione con arietà n e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine

Termini: Esempi

- Dato l'alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ dove $a \in \mathcal{C}$, $x \in \mathcal{V}$ e $f, g \in \mathcal{F}$:
  - a, con $a \in \mathcal{C}$
  - x, con $x \in \mathcal{V}$
  - $g(a)$, con $g \in \mathcal{F}$ di arietà 1
  - $f(x, g(a))$, con $f \in \mathcal{F}$ di arietà 2
- Notazione: conviene usare per i ben noti simboli di funzione binari una notazione standard ovvero quella infissa invece di quella prefissa
- Esempio: dati $+, * \in \mathcal{F}$ con arietà 2 scriviamo $x + (1 * z)$ per indicare il termine $+(x, *(1, z))$

Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (1)

- Le **formule** rappresentano enunciati dichiarativi e analogamente la loro sintassi si può definire induttivamente (fissato un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$)
- Consideriamo prima le formule corrispondenti alla categoria sintattica *Pred*:

$$Pred \quad := \quad PIde \mid PIde(Term\{, Term\})$$

- Se $p \in \mathcal{P}$ è un simbolo di predicato allora
  - se ha arietà 0 allora p è una formula corrispondente ad una variabile proposizionale nel CP
  - se ha arietà $n > 0$ e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini allora $p(t_1, \ldots, t_n)$ è una formula
- Attenzione In modo analogo ai simboli di funzione si usa anche la notazione infissa per simboli di predicato con arietà 2
- Esempio: $x{=}y$ o $z{\leq}f(x)$ con $=, \leq \in \mathcal{P}$ con arietà 2

Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (2)

- Le rimanenti categorie sintattiche sono

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{Fbf} & ::= & \\
 & & \mathit{Fbf} \equiv \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \wedge \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \vee \mathit{Fbf} \mid \\
 & & \mathit{Fbf} \Rightarrow \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \Leftarrow \mathit{Fbf} \\
 & & \mathit{Atom} \mid \neg \mathit{Atom} \\
\mathit{Atom} & ::= & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \mathit{Pred} \mid (\mathit{Fbf}) \mid (\mathit{FbfQuant}) \\
\mathit{FbfQuant} & ::= & (\forall \mathit{Var}.\mathit{Fbf}) \mid (\exists \mathit{Var}.\mathit{Fbf})
\end{array}
$$

- definiscono le formule induttivamente come segue
  - $\mathbf{T}$ e $\mathbf{F}$ sono formule
  - Se P è una formula allora $\neg P$ e (P) sono formule
  - Se P e Q sono formule allora $P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q, P \equiv Q, P \Leftarrow Q$ sono formule
  - Se P è una formula e $x \in \mathcal{V}$, allora $(\forall x.P)$ e $(\exists x.P)$ sono formule

Sintassi delle Formule: Esempi

- Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi

$$(\forall x.\mathit{pari}(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg \mathit{primo}(x))$$

- Se x è pari allora il successore di x è dispari

$$(\forall x.\mathit{pari}(x) \Rightarrow \mathit{dispari}(x+1))$$

- Se x è pari allora $x+1$ è dispari" implica "se 4 è pari allora 5 è dispari

$$(\forall x.\mathit{pari}(x) \Rightarrow \mathit{dispari}(x+1) \Rightarrow (\mathit{pari}(4) \Rightarrow \mathit{dispari}(5))$$

Simboli di Variabile? Simboli di Predicato? Simboli di Funzione? Simboli di Costante?

Occorrenze di Variabili Libere o Legate

- In una formula quantificata come $(\forall x.P)$ o $(\exists y.P)$ la sottoformula P è detta la **portata** del quantificatore
- Una occorrenza di variabile x è **legata** se compare nella portata di un quantificatore altrimenti è detta **libera**
- Esempio:

$$(\forall y.z = y \wedge (x = y \vee (\exists x.x = z \vee z = y)))$$

  - Portata di $\forall y$?
  - Portata di $\exists x$?
  - Occorrenze di variabili legate?
  - Occorrenze di variabili libere?

Formule Aperte e Chiuse

- Una formula di LPO si dice aperta se contiene occorrenze di variabili libere altrimenti si dice chiusa
- Notazione: Spesso scriveremo $P(x)$ per indicare che x è libera nella formula P
- Siamo interessati principalmente a formule chiuse
- In ogni caso il nome di una variabile legata può essere cambiato grazie alle leggi di **ridenominazione**:

$$
\begin{array}{lll}
(\forall x.P) \equiv (\forall y.P[y/x]) & \text{se } y \text{ non compare in } P & (\mathit{Ridenom.}) \\
(\exists x.P) \equiv (\exists y.P[y/x]) & \text{se } y \text{ non compare in } P & (\mathit{Ridenom.})
\end{array}
$$

Interpretazione e Semantica

- Come in CP la semantica di una formula chiusa di LPO si determina rispetto ad una interpretazione
- Una **interpretazione** fissa il significato dei simboli che compaiono:
  - Il dominio di interesse (un insieme)
  - A quali **elementi** del dominio corrispondono i simboli di costante in $\mathcal{C}$
  - A quali **funzioni** sul dominio corrispondono i simboli di funzione in $\mathcal{F}$
  - A quali **proprietà** o **relazioni** corrispondono i simboli di predicato in $\mathcal{P}$
- Una interpretazione assegna la semantica ad una formula chiusa
- Come si calcola? Componendo i valori delle formule atomiche nelle formule composte si arriva a stabilire il valore di verità della formula complessiva
- Procedimento simile a quello del CP, ma reso più complesso dalla necessità di calcolare funzioni e predicati, e dalla presenza dei quantificatori

Interpretazione: Definizione Formale

Dato un un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ una intepretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ è costituita da:

- Un insieme $\mathcal{D}$, detto dominio dell' interpretazione
- Una funzione di interpretazione α che associa:
  - ad ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ del linguaggio un **elemento** del dominio $\mathcal{D}$, rappresentato da $\alpha(c)$
  - ad ogni **simbolo di funzione** $f \in \mathcal{F}$ di arietà n una funzione $\alpha(f)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un elemento di $\mathcal{D}$. Ovvero

$$\alpha(f) = \mathcal{D}^n \rightarrow \mathcal{D}$$

  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità**, indicato da $\alpha(p)$
  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà n (un **predicato** n**-ario**), una funzione $\alpha(p)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un valore di verità. Ovvero

$$\alpha(p) = \mathcal{D}^n \rightarrow \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

Esempio Informale di Semantica: Alfabeto e Interpretazioni

Consideriamo l'alfabeto $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ $\quad \mathcal{F} = \{\}$ $\quad \mathcal{P} = \{\mathbf{p}(\_)\}$ $\quad \mathcal{V} = \{x, y\}$

Consideriamo le seguenti interpretazioni:

- Interpretazione $\mathcal{I}_1 = (\mathcal{D}_1, \alpha_1)$
  - **Dominio**: $\mathcal{D}_1$ sono tutte le città italiane
  - $\alpha_1(\mathbf{a}) =$ **Milano**, $\alpha_1(\mathbf{b}) =$ **Roma**, $\alpha_1(\mathbf{c}) =$ **Pontedera**
  - $\alpha_1(\mathbf{p})(x) =$ **T** se x è capoluogo di provincia, **F** altrimenti
- Interpretazione $\mathcal{I}_2 = (\mathcal{D}_2, \alpha_2)$
  - **Dominio**: $\mathcal{D}_2 = \{\mathbf{5}, \mathbf{10}, \mathbf{15}\}$
  - $\alpha_2(\mathbf{a}) = \mathbf{5}$, $\alpha_2(\mathbf{b}) = \mathbf{10}$, $\alpha_2(\mathbf{c}) = \mathbf{15}$
  - $\alpha_2(\mathbf{p})(x) =$ **T** se x è multiplo di **5**, **F** altrimenti
- Interpretazione $\mathcal{I}_3 = (\mathcal{D}_3, \alpha_3)$
  - come $\mathcal{I}_2$, ma **Dominio**: $\mathcal{D}_3 = \mathbb{N}$

Esempio di Semantica: Valore di Verità di Formule

	Dominio	$\alpha(\mathbf{a})$	$\alpha(\mathbf{b})$	$\alpha(\mathbf{c})$	$\alpha(\mathbf{p})(x) = \mathbf{T}$
$\mathcal{I}_1$	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	x capoluogo
$\mathcal{I}_2$	$\{5, 10, 15\}$	5	10	15	x multiplo di 5
$\mathcal{I}_3$	numeri naturali	5	10	15	x multiplo di 5

Formula	**Valore in** $\mathcal{I}_1$	**Valore in** $\mathcal{I}_2$	**Valore in** $\mathcal{I}_3$
$p(a)$	**T**	**T**	**T**
$p(b)$	**T**	**T**	**T**
$p(c)$	**F**	**T**	**T**
$p(a) \wedge p(c)$	**F**	**T**	**T**
$(\exists x.p(x))$	**T**	**T**	**T**
$(\forall x.p(x))$	**F**	**T**	**F**
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\neg p(y))$	**T**	**F**	**T**

Esempio: Semantica di Formula dipende da Interpretazione

- Consideriamo la formula chiusa:
$$\boxed{(\forall x.p(x) \vee q(x))}$$
- Intepretazione 1:
  - Il dominio è quello degli esseri umani
  - Il predicato p significa “essere maschio”
  - Il predicato q significa “essere femmina”

  La formula è vera
- Intepretazione 2:
  - Il dominio è quello dei numeri naturali
  - Il predicato p significa “essere numero primo”
  - Il predicato q significa “essere numero pari”

  La formula è falsa