Logica per la Programmazione

Lezione 8

- Formalizzazione di Enunciati
- Semantica della Logica del Primo Ordine

Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (1)

- Anche se abbiamo associato un valore di verità alle formule in modo informale: vedremo in seguito la definizione formale della semantica
- Per formalizzare un enunciato **E** dobbiamo fornire:
  - un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ ed una associata interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$
  - una **formula** del primo ordine che, per l'interpretazione $\mathcal{I}$, sia vera se e solo se l'enunciato **E** è vero

Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (2)

Dato un enunciato **E** per identificare l'alfabeto $\mathcal{A}$ e l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$

- individuiamo il **dominio** $\mathcal{D}$ di cui parla l'enunciato
- per ogni individuo $d \in \mathcal{D}$ menzionato in **E**, introduciamo un simbolo di **costante** $c \in \mathcal{C}$ e fissiamo $\alpha(c) = d$
- per ogni operatore **op** menzionato in **E** che applicato a elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un individuo di $\mathcal{D}$, introduciamo un simbolo di **funzione** $f \in \mathcal{F}$ e fissiamo $\alpha(f) = \mathbf{op}$
- per ogni proprietà di individui o relazione tra individui **R** menzionata in **E**, introduciamo un simbolo di **predicato** $p \in \mathcal{P}$ e fissiamo $\alpha(p) = \mathbf{R}$

Formalizzazione di Enunciati: Esempio (1)

"Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi"

- Dominio: $\mathbb{N}$ (numeri naturali)
- Elementi del dominio menzionati: "due"
  - Introduciamo la costante $\mathbf{2} \in \mathcal{C}$ con $\alpha(2) = \underline{\mathbf{2}} \in \mathbb{N}$
- Proprietà o relazioni tra naturali menzionate:
  - "n è pari": introduciamo **pari** $\in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{pari})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è pari, **F** altrimenti
  - "n è primo": introduciamo **primo** $\in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{pari})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è primo, **F** altrimenti
  - "n è maggiore di m": introduciamo $> \in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(>)(n, m) = \mathbf{T}$ se n è maggiore di m, **F** altrimenti
- Formula:

$$(\forall x.pari(x) \land x > 2 \Rightarrow \neg primo(x))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esempio (2)

- Alberto non segue LPP ma va al cinema con Bruno o con Carlo
- Almeno uno studente di LPP non va al cinema
- Esattamente uno studente di LPP non va al cinema
- Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema
- Tutti gli studenti di LPP tranne Alberto vanno al cinema
- Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema

Alfabeto ed Interpretazione: Esempio (2)

- Dominio: l'insieme delle persone
- Costanti: le persone Alberto, Bruno e Carlo. Introduciamo le costanti $A, B, C \in \mathcal{C}$ tali che $\alpha(A) =$"la persona Alberto", $\alpha(B) =$"la persona Bruno" e $\alpha(C) =$"la persona Carlo"
- Operatori sul dominio menzionati: nessun simbolo di funzione
- Predicati (proprietà o relazioni tra persone):
  - introduciamo un simbolo di predicato $vaCinema \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(vaCinema)(d) =$ **T** se d va al cinema, **F** altrimenti
  - introduciamo un simbolo di predicato $segueLPP \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(segueLPP)(d) =$ **T** se d segue LPP, **F** altrimenti
  - introduciamo un simbolo di predicato $= \in \mathcal{P}$ con arietà 2 con il significato standard

Esempio (2) : Formule

- Alberto non segue LPP ma va al cinema con Bruno o con Carlo:

$$\neg segueLPP(A) \wedge (vaCinema(A) \wedge (vaCinema(B) \vee vaCinema(C)))$$

- Almeno uno studente di LPP non va al cinema

$$(\exists x.segueLPP(x) \wedge \neg vaCinema(x))$$

- Esattamente uno studente di LPP non va al cinema

$$\begin{array}{l}(\exists x.segueLPP(x) \wedge \neg vaCinema(x)) \wedge \\ \quad \neg((\exists y.segueLPP(y) \wedge \neg vaCinema(y) \wedge \neg(x = y)))\end{array}$$

Esempio (2) : Formule

- Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema

$$(\forall x.segueLPP(x) \Rightarrow vaCinema(x))$$

- Tutti gli studenti di LPP tranne Alberto vanno al cinema

$$(\forall x.segueLPP(x) \wedge \neg(x = A) \Rightarrow vaCinema(x))$$

- Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema

$$(\exists x.segueLPP(x) \wedge \neg vaCinema(x) \wedge \\ (\forall y.segueLPP(y) \wedge \neg(y = x) \Rightarrow vaCinema(y)))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esercizio (3)

Formalizzare l'enunciato: "Due persone sono parenti se hanno un antenato in comune"

- Dominio: l'insieme delle persone
- Costanti, operatori sul dominio menzionati: nessuno
- Proprietà o relazioni tra persone:
  - "d_1 e d_2 sono parenti": introduciamo *parenti* $\in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(\mathit{parenti})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$ se d_1 e d_2 sono parenti, **F** altrimenti
  - "d_1 è antenato di d_2": introduciamo *antenato* $\in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(\mathit{antenato})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$ se d_1 è antenato di d_2, **F** altrimenti
- Formula:

$$(\forall x.(\forall y.(\exists z.\mathit{antenato}(z, x) \wedge \mathit{antenato}(z, y)) \Rightarrow \mathit{parenti}(x, y)))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esercizi

Si consideri l'alfabeto con simboli di predicato

$$\mathcal{P} = \{padre(\_,\_), madre(\_,\_), fratelli(\_,\_), = (-,-)\}$$

e l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D}$ è l'insieme di tutte le persone ed α è definita come segue:

- $\alpha(madre)(p, q)$ è vera se e solo se p è madre di q,
- $\alpha(padre)(p, q)$ è vera se e solo se p è padre di q,
- $\alpha(fratelli)(p, q)$ è vera se e solo se p e q sono fratelli,
- $\alpha(=)(p, q)$ è vera se e solo se p e q sono la stessa persona.

Formalizzare i seguenti enunciati

1. Ogni persona ha un padre e una madre
2. Ogni persona ha esattamente una madre
3. Non esiste una persona che è madre di tutte le persone
4. Due persone sono fratelli se hanno lo stessa madre
5. Due persone sono fratelli se e solo se hanno lo stesso padre o la stessa madre

Formalizzazione di Enunciati: Esercizi

Si consideri l'alfabeto con simboli di costante $\mathcal{C} = \{0, 1\}$, simboli di funzione $\mathcal{F} = \{+(-,-), \cdot(-,-)\}$ e con simboli di predicato $\mathcal{P} = \{<(\_,\_), =(-,-), pari(-), primo(-)\}$. Dato l'alfabeto la seguente interpretazione rappresenta l' interpretazione standard relativa al dominio dei naturali, ovvero $\mathcal{I} = (\mathbb{N}, \alpha)$, dove $\mathbb{N}$ è il dominio dei naturali ed α è definita come segue: Quindi

- $\alpha(0) = 0$ con $0 \in \mathbb{N}$, e $\alpha(1) = 1$ con $1 \in \mathbb{N}$,
- $\alpha(+)(p, q) = p + q$ e $\alpha(\cdot)(p, q) = p \cdot q$,
- $\alpha(=)(p, q)$ è vera se e solo se p e q sono lo stesso numero,
- $\alpha(<)(p, q)$ è vera se e solo se $p < q$,
- $\alpha(pari)(p)$ è vera se e solo se p è pari,
- $\alpha(primo)(p)$ è vera se e solo se p è primo.

Formalizzazione di Enunciati: Esercizi

Si formalizzino i seguenti enunciati rispetto all' alfabeto dato ed all' interpretazione standard sui naturali

1. x è multiplo di y,
2. Un numero è pari se e solo se è multiplo di 2,
3. Un numero è primo se e solo se è divisibile solo per 1 e per se stesso,
4. Ogni numero è esprimibile come il prodotto di due numeri più piccoli
5. Esiste un numero naturale minore o uguale di ogni altro numero,
6. Esiste un numero naturale maggiore o uguale di ogni altro numero,
7. Dato qualsiasi numero naturale ne esiste uno più grande,
8. z è il minimo comune multiplo di x ed y.

Sommario

- Finora abbiamo associato un valore di verità alle formule in modo informale: vedremo ora la definizione formale della semantica
- Siamo interessati a fornire la semantica delle formule chiuse rispetto ad una **interpretazione**

Interpretazione: Richiamo

Dato un un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ una intepretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ è costituita da:

- Un insieme $\mathcal{D}$, detto dominio dell' interpretazione
- Una funzione di interpretazione α che associa:
  - ad ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ del linguaggio un **elemento** del dominio $\mathcal{D}$, rappresentato da $\alpha(c)$
  - ad ogni **simbolo di funzione** $f \in \mathcal{F}$ di arietà n una funzione $\alpha(f)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un elemento di $\mathcal{D}$. Ovvero

$$\alpha(f) = \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$$

  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$
    - se p ha arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità**, indicato da $\alpha(p)$
    - se P ha arietà n (un **predicato** n**-ario**), una funzione $\alpha(p)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un valore di verità. Ovvero

$$\alpha(p) = \mathcal{D}^n \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

La Semantica della Logica del Primo Ordine

- Fissiamo un linguaggio del primo ordine, ovvero un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{V}, \mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$
- Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e una **formula chiusa** ϕ, vogliamo definire in modo formale la **semantica** di ϕ in $\mathcal{I}$, cioè il suo valore di verità
- Tale valore di verità si calcola **procedendo in maniera induttiva** sulla formula ϕ
- Per far questo, dobbiamo prima dare la **semantica** dei **termini** che compaiono in ϕ
  - I termini **chiusi** (che non contengono variabili) denotano elementi del dominio di interpretazione $\mathcal{D}$
  - La **semantica** dei **termini** (che denota un elemento del dominio) si calcola analogamente **procedendo in maniera induttiva**

La Semantica: Commenti

- È **conveniente** dare la semantica per formule generali
- Consideremo **formule aperte** che possono contenere variabili libere
- Analogamente consideremo **termini aperti** che possono contenere variabili
- La semantica di termini e formule aperte dipende da un assegnamento che associa un **elemento del dominio** ad ogni variabile

Assegnamenti

- Per dare la semantica ad una formula (o termine) aperta rispetto ad una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ introduciamo un **assegnamento**
- Un **assegnamento** è una funzione che associa ad ogni variabile in $\mathcal{V}$ un elemento del dominio: $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$
- Con $\rho[d/x]$ intendiamo l'assegnamento ρ modificato in modo tale che associ alla variabile $x \in \mathcal{V}$ il valore del dominio $d \in \mathcal{D}$, ovvero

$$\rho[d/x](y) = \begin{cases} d & \text{se } x = y \\ \rho(y) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Esempio: Dati $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ e $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$ assumiamo ρ dove $\rho(x) = 0$, $\rho(y) = 3$, $\rho(z) = 1$. Allora $\rho[15/z] = \rho_1$ corrisponde a:

$$\rho_1(x) = 0, \rho_1(y) = 3, \rho_1(z) = 15$$

Semantica dei Termini Aperti

- Ricordiamo la definizione (induttiva) sintattica di termine:
  - Ogni variabile x con $x \in \mathcal{V}$ è un termine
  - Ogni costante c con $c \in \mathcal{C}$ è un termine
  - Se $f \in \mathcal{F}$ è un simbolo di funzione con arietà n e $t_1, \ldots, t_n$ sono termini, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine
- Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$, la **semantica** di un termine t, in simboli $\alpha_\rho(t)$, è un elemento del dominio $\mathcal{D}$
- $\alpha_\rho(t)$ è ottenuta **per induzione strutturale** con le tre regole:
  - (R0) se t è la variabile x allora $\alpha_\rho(t) = \rho(x)$
  - (R1) se t è una costante c allora $\alpha_\rho(t) = \alpha(c)$
  - (R2) se t è il termine $f(t_1, \ldots, t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1$, ... , $\alpha_\rho(t_n) = d_n$, allora
  $$\alpha_\rho(t) = \alpha(f)(d_1, \ldots, d_n)$$

Un Esempio di Interpretazione

- Alfabeto
  - $\mathcal{C} = \{\mathbf{a}\}$
  - $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}\}$ con arietà 1
  - $\mathcal{P} = \emptyset$
  - $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$
- Interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$
  - $\mathcal{D} = \mathbb{N}$, insieme dei numeri naturali
  - $\alpha(\mathbf{a}) = 0$
  - $\alpha(\mathbf{f})$ è la funzione successore $\alpha(\mathbf{f})(n) = n + 1$

Esempio: Semantica di un Termine Chiuso

- Determiniamo la semantica del termine chiuso $\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))$ rispetto all'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed all'assegnamento ρ dove

$$\rho(x) = 2, \rho(y) = 3, \rho(z) = 1$$

- Calcoliamo $\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a))))$:

$$\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))) = \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a)))) = \alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(a))) + 1 = \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(\mathbf{f}(a))) + 1 = \alpha_\rho(\mathbf{f}(a)) + 1 + 1 = \alpha(\mathbf{f})(\alpha_\rho(a)) + 2 = \alpha_\rho(a) + 1 + 2 = \alpha(a) + 1 + 2 = 0 + 3 = 3$$

- La semantica di un termine è un elemento del dominio !!!
- Dato che il termine è chiuso la semantica non dipende da ρ

Esempio: Semantica di un Termine Aperto

- Consideriamo di nuovo l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e l'assegnamento ρ dove

$$\rho(x) = 2, \rho(y) = 3, \rho(z) = 1$$

- Determiniamo la semantica del termine aperto $\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))$:

$$\alpha_\rho(\mathbf{f}(\mathbf{f}(x))) = \ \ldots = \alpha_\rho(x) + 1 + 1 = \rho(x) + 1 + 1 = 4.$$

- Dato che il termine è aperto la semantica in questo caso dipende dall'assegnamento ρ!!!!!

Semantica delle Formule Aperte

- La semantica di un formula (aperta) ϕ viene indicata con $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ rispetto ad una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ e ad un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \to \mathcal{D}$
- La semantica di un formula ϕ (in simboli $\mathcal{I}_\rho(\phi)$) si definisce per **induzione strutturale** sulla formula ϕ
- Il valore di verità (ovvero la semantica) $\mathcal{I}_\rho(\phi)$ di un formula ϕ si determina in base alle seguenti regole

Semantica delle Formule (1): Formule Atomiche

- **Caso base: formule atomiche**. Ricordiamo la definizione sintattica dato un simbolo di predicato $p \in \mathcal{P}$
  - se p ha arietà 0 allora p è una formula (corrisponde a una variabile proposizionale nel CP)
  - se p ha arietà $n > 0$ e $t_1, ..., t_n$ sono termini allora $p(t_1, ..., t_n)$ è una formula.
- Data una interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ ed un assegnamento $\rho : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{D}$ definiamo la regola (S1) come segue:
  - se $\phi = p$ dove il predicato p ha arietà 0 allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \alpha(p)$$

  - se $\phi = p(t_1, ..., t_n)$ e $\alpha_\rho(t_1) = d_1$, ... , $\alpha_\rho(t_n) = d_n$, allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \alpha(p)(d_1, ..., d_n)$$

Semantica delle Formule (2): Connettivi Logici

- (S2) se $\phi = (\psi)$ allora $\mathcal{I}_\rho(\phi) = \mathcal{I}_\rho(\psi)$
- (S3) se $\phi = \neg\psi$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(\psi) = \mathbf{F} \\ \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(\psi) = \mathbf{T} \end{cases}$$

- (S4) se $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(\phi_1) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(\phi_2) = \mathbf{T} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S5) se $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ allora

$$I_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(\phi_1) = \mathbf{F} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(\phi_2) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S6) se $\phi = \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{F} & \text{se } \mathcal{I}\rho(\phi_1) = \mathbf{T} \text{ e } \mathcal{I}_\rho(\phi_2) = \mathbf{F} \\ \mathbf{T} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S7) se $\phi = \phi_1 \equiv \phi_2$ allora

$$I_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_\rho(\phi_1) = \mathcal{I}_\rho(\phi_2) \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Semantica delle Formule (3): Quantificatori

- (S8) se $\phi = (\forall x.\psi)$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(\psi) = \mathbf{T} \quad \text{per qualunque } \mathbf{d} \in \mathcal{D} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- (S9) se $\phi = (\exists x.\psi)$ allora

$$\mathcal{I}_\rho(\phi) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } \mathcal{I}_{\rho[\mathbf{d}/x]}(\psi) = \mathbf{T} \quad \text{per almeno } \mathbf{d} \in \mathcal{D} \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- **Nota**: l'uso dell' **assegnamento** ρ è necessario per le regole dei quantificatori (S8) ed (S9) infatti la formula ψ è tipicamente una formula aperta

Semantica: Esercizio 1

Mostrare che la formula

$$\phi_1 = (\exists x.Q(x) \wedge (\forall y.P(x,y)))$$

è vera nell'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{a, b\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(x,y) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ e } y = a \text{ oppure } x = a \text{ e } y = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(x) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } x = a \text{ oppure } x = b \\ \mathbf{F} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Procedimento: Calcolare il valore di $\mathcal{I}_{\rho_0}(\phi_1)$ usando le regole (S1)-(S9) per induzione strutturale, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.

Semantica: Esercizio 2

Calcolare il valore di verità della formula

$$\phi_2 = (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x) \wedge R(x)))$$

rispetto all'interpretazione$\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$, dove $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$ ed α è definita come segue:

$$\alpha(P)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z = a \text{ oppure } z = b \\ \mathbf{F} & \text{se } z = c \end{cases}$$

$$\alpha(Q)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z = a \text{ oppure } z = c \\ \mathbf{F} & \text{se } z = b \end{cases}$$

$$\alpha(R)(z) = \begin{cases} \mathbf{T} & \text{se } z = b \\ \mathbf{F} & \text{se } z = a \text{ oppure } z = c \end{cases}$$

Procedimento: Calcolare il valore di $\mathcal{I}_{\rho_0}(\phi_2)$ usando le regole (S1)-(S9) per induzione strutturale, dove ρ_0 è un assegnamento arbitrario.