Logica per la Programmazione

Lezione 3

- Dimostrazione di tautologie: leggi derivate
- Formule Ambigue
- Esercizi

Commenti

- Si può mostrare che tutte le tautologie del Calcolo Proposizionale sono dimostrabili a partire dall'insieme delle leggi visto sinora
- Naturalmente la tecnica non automatizza le dimostrazioni. Rimane a carico nostro la scelta delle leggi da usare, da quale membro della equivalenza partire, l'organizzazione della sequenza dei passaggi
- Conviene comunque, per motivi di espressività e compattezza delle definizioni, introdurre altre leggi derivate che sono molto utili in pratica

Leggi Derivate: Complemento

$$\boxed{\begin{array}{ll} (P \vee (\neg P \wedge Q)) \equiv (P \vee Q) & (\mathit{Complemento}) \\ (P \wedge (\neg P \vee Q)) \equiv (P \wedge Q) & \end{array}}$$

- Dimostriamo come esempio la prima partendo dal membro di sinistra $P \vee (\neg P \wedge Q)$

$$\begin{array}{lll} & P \vee (\neg P \wedge Q) & \\ \equiv & & \{(\text{Distr.})\} \\ & (P \vee \neg P) \wedge (P \vee Q) & \\ \equiv & & \{(\text{Terzo Escluso})\} \\ & \mathbf{T} \wedge (P \vee Q) & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & (P \vee Q) & \end{array}$$

Leggi Derivate: Assorbimento

$$\boxed{\begin{array}{ll} (P \wedge (P \vee Q)) \equiv P & \textit{(Assorbimento)} \\ (P \vee (P \wedge Q)) \equiv P & \end{array}}$$

- Dimostriamo come esempio la prima partendo dal membro di sinistra $(P \wedge (P \vee Q))$

$$\begin{array}{lll} & (P \wedge (P \vee Q)) & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & (P \vee \mathbf{F}) \wedge (P \vee Q) & \\ \equiv & & \{(\text{Distr.})\} \\ & P \vee (\mathbf{F} \wedge Q) & \\ \equiv & & \{(\text{Zero})\} \\ & P \vee \mathbf{F} & \\ \equiv & & \{(\text{Unità})\} \\ & P & \end{array}$$

Insiemi Funzionalmente Completi di Connettivi Logici

- Abbiamo introdotto 6 tipi di connettivi logici:

Connettivo	Forma simbolica	Operazione corrispondente
not	$\neg p$	*negazione*
and, *e*	$p \wedge q$	*congiunzione*
or, *o*	$p \vee q$	*disgiunzione*
se p allora q	$p \Rightarrow q$	*implicazione*
p se e solo se q	$p \equiv q$	*equivalenza*
p se q	$p \Leftarrow q$	*conseguenza*

- Alcuni possono essere definiti in termini di altri
- Molti sottoinsiemi sono "funzionalmente completi" ovvero permettono di derivare tutti gli altri
- Ovviamente $\{\wedge, \neg, \vee\}$ è funzionalmente completo!
- Anche $\{\vee, \neg\}$, $\{\Rightarrow, \neg\}$ e $\{\wedge, \neg\}$ sono funzionalmente completi!
- Mostriamo come esempio il caso di $\{\wedge, \neg\}$

L'Insieme $\{\wedge, \neg\}$ è funzionalmente completo

- Occorre mostrare che una qualunque formula proposizionale è equivalente a una formula che contiene solo $\{\wedge, \neg\}$
- Per induzione strutturale sulla sintassi delle formule:
  - implicazione ($\Rightarrow$), conseguenza ($\Leftarrow$) ed equivalenza ($\equiv$) possono essere eliminate in base alle leggi
  - disgiunzione:

$$
\begin{array}{lll}
 & P \vee Q & \\
\equiv & & \{(\text{Doppia Neg.})\} \\
 & \neg\neg(P \vee Q) & \\
\equiv & & \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg(\neg P \wedge \neg Q) &
\end{array}
$$

Ambiguità della Sintassi del Calcolo Proposizionale

- Abbiamo già presentato la grammatica del calcolo:

$$
\begin{array}{lll}
Prop & ::= & \\
 & & Prop \equiv Prop \mid Prop \wedge Prop \mid Prop \vee Prop \mid \\
 & & Prop \Rightarrow Prop \mid Prop \Leftarrow Prop \\
 & & Atom \mid \neg Atom \\
Atom & ::= & \\
 & & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid Ide \mid (Prop) \\
Ide & ::= & \\
 & & p \mid q \mid \ldots \mid P \mid Q \mid \ldots
\end{array}
$$

- Questa grammatica è **ambigua**: esistono formule proposizionali che hanno più di un albero di derivazione (**formule ambigue**)
- Assumiamo che nel frattempo sia stato spiegato il concetto di grammatica ed albero di derivazione......

Formule Ambigue: Esempi

- $P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$
- $P \land Q \lor R$
- $P \land Q \Rightarrow R$
- $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$
- Non hanno una intrepretazione univoca!
- Come costruire la tabella di verità?

Ambiguità della Grammatica: un Esempio

- Due alberi di derivazione per: $P \Rightarrow \neg P \Rightarrow Q$
- Corrispondono alle due formule disambiguate con le parentesi:
  - $(P \Rightarrow \neg P) \Rightarrow Q$
  - $P \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$
- Problema: non sono equivalenti!!!!
- Esercizio: mostrare che la seconda è una tautologia, la prima no
- Senza usare le tabelle di verità (trovare un controesempio per la prima ed una dimostrazione per la seconda)

Precedenza tra Connettivi

- Stabiliamo i seguenti livelli di precedenza tra connettivi logici, per disambiguare le proposizioni:

operatore	*livello di precedenza*
$\equiv$	0
$\Rightarrow, \Leftarrow$	1
$\wedge, \vee$	2
$\neg$	3

- Possiamo omettere le parentesi relative al connettivo che ha precedenza maggiore rispetto agli altri
- In questo modo si ottiene una notazione per le formule più compatta
- Da ora in poi useremo questa convenzione nello scrivere le formule

Parentesi: Esempi

- $(P \wedge Q) \Rightarrow R$ si può scrivere come

$$P \wedge Q \Rightarrow R$$

- $P \wedge (Q \Rightarrow R)$ si può scrivere come

$$P \wedge (Q \Rightarrow R)$$

- $(P \Rightarrow (Q \wedge R)) \equiv ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R))$ si può scrivere come

$$P \Rightarrow Q \wedge R \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$$

- $P \wedge Q \vee R$ resta ambigua e sintatticamente sbagliata!!

Esercizi Proposti: (1)

Dimostrare tramite una dimostrazione per sostituzione che le seguenti formule sono tautologie:

- $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ (Contropositiva)
- $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ $(\neg\text{-}\Rightarrow)$
- $\neg(P \equiv Q) \equiv (P \equiv \neg Q)$ $(\neg\text{-}\equiv)$
- $(P \Rightarrow \neg P) \equiv \neg P$
- $((Q \Rightarrow P) \Rightarrow R) \equiv ((P \Rightarrow R) \wedge (\neg Q \Rightarrow R))$

Esercizi Proposti: (2)

Dimostrare tramite una dimostrazione per sostituzione che le seguenti formule sono tautologie:

- $P \wedge Q \Rightarrow Q$ (Sempl-$\wedge$)
- $P \Rightarrow P \vee Q$ (Intro-$\vee$)
- $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ (Modus Ponens)
- $\neg Q \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$ (Modus Tollens)
- $(Q \vee S) \wedge (Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow S)$
- $(P \equiv Q) \wedge (Q \equiv R) \Rightarrow (P \equiv R)$ (Proprieta Transitiva)

Attenzione: alcune di queste tautologie sono importati leggi logiche che useremo nelle lezioni successive

Esercizi Proposti: (3)

Dimostrare tramite una dimostrazione per sostituzione che le seguenti formule sono equivalenti:

1. $P \vee \neg Q \;\Rightarrow\; (R \;\Rightarrow\; P)$
2. $(\neg P \wedge \neg Q \;\Rightarrow\; \neg R) \vee (R \;\Rightarrow\; \neg Q \wedge P)$
3. $R \wedge \neg P \;\Rightarrow\; \neg P \wedge Q$

Alcuni Esercizi

Dimostrare tramite una dimostrazione per sostituzione che le seguenti formule sono tautologie:

- (Contropositiva) : $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$$
\begin{array}{ll}
 & P \Rightarrow Q \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\ \} \\
 & \neg P \vee Q \\
\equiv & \quad \{(\text{Doppia Negazione})\} \\
 & \neg P \vee \neg\neg Q \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \neg Q \Rightarrow \neg P
\end{array}
$$

- $(\neg\text{-}\Rightarrow)$: $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$

Esercizi: alcuni svolti

- Dimostriamo la legge del (Modus Ponens) ovvero
  $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

$$
\begin{array}{ll}
 & P \wedge (\underline{P \Rightarrow Q}) \Rightarrow Q \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\} \\
 & \underline{P \wedge (\neg P \vee Q)} \Rightarrow Q \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento})\} \\
 & \underline{P \wedge Q \Rightarrow Q} \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow)\ \} \\
 & \underline{\neg(P \wedge Q)} \vee Q \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan})\} \\
 & \neg P \vee \underline{\neg Q \vee Q} \\
\equiv & \quad \{(\text{Terzo Escluso})\} \\
 & \underline{\neg P \vee \mathbf{T}} \\
\equiv & \quad \{(\text{Zero})\} \\
 & \mathbf{T}
\end{array}
$$

- La formula $P \wedge (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ rappresenta la versione disambiguata
- In modo analogo dimostrare anche la legge di (Modus Tollens)

Esercizio (3): soluzioni

- Dimostrare che le seguenti formule sono equivalenti:
  1. $P \vee \neg Q \;\Rightarrow\; (R \;\Rightarrow\; P)$
  2. $(\neg P \wedge \neg Q \;\Rightarrow\; \neg R) \vee (R \;\Rightarrow\; \neg Q \wedge P)$
- Procediamo per sostituzione su entrambe le formule per cercare di trasformarle nella stessa formula. Considerando la prima abbiamo

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{P \vee \neg Q \;\Rightarrow\; (\underline{R \;\Rightarrow\; P})} \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow), \text{ due volte}\} \\
 & \underline{\neg(P \vee \neg Q)} \vee (\neg R \vee P) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan })\} \\
 & (\neg P \wedge \underline{\neg\neg Q}) \vee (\neg R \vee P) \\
\equiv & \quad \{(\text{Doppia Negazione})\} \\
 & \underline{(\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \vee P)} \\
\equiv & \quad \{(\text{Complemento}), (\text{Associativa})\} \\
 & Q \vee (\neg R \vee P)
\end{array}
$$

Esercizio (3): soluzioni

- Dimostrare che le seguenti formule sono equivalenti:
  1. $P \vee \neg Q \;\Rightarrow\; (R \;\Rightarrow\; P)$
  2. $(\neg P \wedge \neg Q \;\Rightarrow\; \neg R) \vee (R \;\Rightarrow\; \neg Q \wedge P)$
- Considerando la seconda abbiamo

$$
\begin{array}{ll}
 & (\underline{\neg P \wedge \neg Q \;\Rightarrow\; \neg R}) \vee (\underline{R \;\Rightarrow\; \neg Q \wedge P}) \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-}\Rightarrow),\ \text{due volte}\} \\
 & (\underline{\neg(\neg P \wedge \neg Q)} \vee \neg R) \vee (\neg R \vee (\neg Q \wedge P)) \\
\equiv & \quad \{(\text{De Morgan}),(\text{Doppia Negazione})\} \\
 & ((P \vee Q) \vee \underline{\neg R) \vee (\neg R} \vee (\neg Q \wedge P)) \\
\equiv & \quad \{(\text{Idempotenza}),(\text{Associativa})\} \\
 & ((P \vee Q) \vee (\neg R \vee (\neg Q \wedge P)) \\
\equiv & \quad \{(\text{Associativa})\} \\
 & ((Q \vee \neg R) \vee (\underline{P \vee (\neg Q \wedge P)}) \\
\equiv & \quad \{(\text{Assorbimento}),\ (\text{Commutativa})\} \\
 & Q \vee (\neg R \vee P)
\end{array}
$$

Esercizio (3): soluzioni

- Dimostrare che le seguenti formule sono equivalenti:

  1. $P \vee \neg Q \;\Rightarrow\; (R \;\Rightarrow\; P)$
  2. $(\neg P \wedge \neg Q \;\Rightarrow\; \neg R) \vee (R \;\Rightarrow\; \neg Q \wedge P)$
  3. $R \wedge \neg P \;\Rightarrow\; \neg P \wedge Q$

- Nel caso della terza formula si suggerisce di ridurla alla prima formula utilizzando la legge (Contropositiva)

$$
\begin{array}{ll}
 & \underline{R \wedge \neg P \;\Rightarrow\; \neg P \wedge Q} \\
\equiv & \quad \{\text{(Contropositiva)}\} \\
 & \underline{\neg(\neg P \wedge Q)} \;\Rightarrow\; \underline{\neg(R \wedge \neg P)} \\
\equiv & \quad \{\text{(De Morgan), due volte}\} \\
 & \underline{\neg\neg P} \vee \neg Q \;\Rightarrow\; \neg R \vee \underline{\neg\neg P} \\
\equiv & \quad \{\text{(Doppia Negazione), due volte}\} \\
 & P \vee \neg Q \;\Rightarrow\; \underline{\neg R \vee P} \\
\equiv & \quad \{(\text{elim-} \Rightarrow)\} \\
 & P \vee \neg Q \;\Rightarrow\; (R \;\Rightarrow\; P)
\end{array}
$$

Il Connettivo "NAND"

- Si consideri il connettivo proposizionale binario **nand** la cui semantica è definita dalla seguente tabella di verità:

P	Q	P **nand** Q
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

- Esercizio: si provi che l'insieme $\{$**nand**$\}$ è **funzionalmente completo**.