Logica per la Programmazione

Lezione 6

- Logica del Primo Ordine
  - Motivazioni
  - Sintassi
  - Interpretazioni
  - Formalizzazione

Limiti del Calcolo Proposizionale

- Nella formalizzazione di enunciati dichiarativi, gli **enunciati atomici** non hanno struttura (sono rappresentati da variabili proposizionali)
- **Es: "Alberto va al cinema con Bruno o va al teatro con Carlo** "
  Introduciamo 4 proposizioni atomiche:
  - AC $\equiv$ Alberto va al cinema
  - BC $\equiv$ Bruno va al cinema
  - AT $\equiv$ Alberto va al teatro
  - CT $\equiv$ Carlo va al teatro
- Formula proposizionale: $(\mathbf{AC} \wedge \mathbf{BC}) \vee (\mathbf{AT} \wedge \mathbf{CT})$
- Tuttavia, "Alberto", "Bruno", ... "cinema" ..., gli individui del nostro discorso e le relazioni tra di essi ("andare al") scompaiono...

Limiti del Calcolo Proposizionale (2)

Le formule proposizionali possono descrivere **relazioni logiche tra un numero finito di enunciati**, ma

- Vorremmo esprimere proprietà di un' **infinità di individui**:
  - "tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi"
    In CP(?) ("4 non è primo") $\wedge$ ("6 non è primo") $\wedge$ ... **NO!**
  - "esiste almeno un numero naturale maggiore di due che non è primo"
    In CP(?) ("3 non è primo") $\vee$ ("4 non è primo") $\vee$ ... **NO!**
- Vorremmo poter esprimere **proprietà "generali"** come
  "se x è pari allora x+1 è dispari"
  ... e riconoscere che da esse derivano proprietà specifiche come
  "se 4 è pari allora 5 è dispari"

Limiti del Calcolo Proposizionale (3)

Anche se descriviamo proprietà di un numero finito di enunciati vorremmo descriverli in maniera **compatta**

- **"tutti gli studenti di LPP vanno al cinema"**
  In CP(?) $\quad S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge S_{150}$
- **"tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema"**
  In CP(?)

$$
\begin{array}{c}
(\neg S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge S_{150}) \vee \\
(S_1 \wedge \neg S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge S_{150}) \vee \\
(S_1 \wedge S_2 \wedge \neg S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge S_{150}) \vee \\
(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge \neg S_4 \ldots \wedge S_{150}) \vee \\
\ldots \\
(S_1 \wedge S_2 \wedge S_3 \wedge S_4 \ldots \wedge \neg S_{150})
\end{array}
$$

Verso la Logica del Primo Ordine

- La **Logica del Primo Ordine** (LPO) estende (include) il **Calcolo Proposizionale**
- Con le formule di LPO
  - si possono denotare/rappresentare esplicitamente gli elementi del **dominio di interesse** (gli individui, usando i **termini**)
  - si possono esprimere **proprietà** di individui e **relazioni** tra due o più individui (usando i **predicati**)
  - si può **quantificare** una formula, dicendo che vale per almeno un individuo, o per tutti gli individui (usando i **quantificatori**)

La Logica del Primo Ordine

- Presenteremo **Sintassi**, **Semantica** e **Sistema di Dimostrazioni**
- Useremo formule della LPO per formalizzare enunciati dichiarativi
- La **Semantica** di una formula di LPO è sempre un valore booleano assegnato in base ad una Interpretazione (ma determinato in modo molto più complesso!!!!)
- Come per il Calcolo Proposizionale, ci interessano le formule che sono "sempre vere" (**formule valide** analoghe alle **tautologie**)
- **Non esistono tabelle di verità**: per vedere se una formula à valida occorre dimostrarlo (e non sempre è possibile trovare una dimostrazione)

Espressività della Logica del Primo Ordine

Esempi (li analizzeremo meglio in seguito):

- Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi:

$$(\forall x.pari(x) \land x > 2 \Rightarrow \neg primo(x))$$

- Esiste almeno un numero naturale maggiori di due che non è primo

$$(\exists x.x > 2 \land \neg primo(x))$$

- Se x è pari allora x+1 è dispari (*) $(\forall x.pari(x) \Rightarrow dispari(x+1))$
- (*) implica "se 4 è pari allora 5 è dispari"

$$(\forall x.pari(x) \Rightarrow dispari(x+1)) \Rightarrow (pari(4) \Rightarrow dispari(5))$$

Logica del Primo Ordine: commenti

Nella Logica del Primo Ordine troviamo due categorie sintattiche e semantiche differenti

- i **termini** che sono passati come argomenti dei predicati e denotano elementi del dominio di riferimento
- le **formule** costruite a partire dai predicati e che assumono valore booleano

La Sintassi della Logica del Primo Ordine: l'Alfabeto

Un **alfabeto** del primo ordine comprende:

- Un insieme $\mathcal{V}$ di simboli di **variabile**
- Un insieme $\mathcal{C}$ di simboli di **costante**
- Un insieme $\mathcal{F}$ di simboli di **funzione**, ognuno con la sua **arietà** (o **numero di argomenti**)
- Un insieme $\mathcal{P}$ di simboli di **predicato**, ognuno con la sua **arietà** (eventualmente 0)
- I simboli $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \equiv, \Leftarrow$ (**connettivi logici**)
- I simboli $\forall, \exists$ (**quantificatori**)
- I simboli ( ) [parentesi] , [virgola] . [punto]

La Sintassi della Logica del Primo Ordine: la Grammatica

Estende la grammatica del Calcolo Proposizionale con nuove produzioni

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{Fbf} & ::= & \\
 & & \mathit{Fbf} \equiv \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \wedge \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \vee \mathit{Fbf} \mid \\
 & & \mathit{Fbf} \Rightarrow \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \ \Leftarrow \ \mathit{Fbf} \\
 & & \mathit{Atom} \mid \neg \mathit{Atom} \\
\mathit{Atom} & ::= & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \mathit{Pred} \mid (\mathit{Fbf}) \mid (\mathit{FbfQuant}) \\
\mathit{FbfQuant} & ::= & (\forall \mathit{Var}.\mathit{Fbf}) \mid (\exists \mathit{Var}.\mathit{Fbf}) \\
\mathit{Pred} & := & \mathit{PIde} \mid \mathit{PIde}(\mathit{Term}\{, \mathit{Term}\}) \\
\mathit{Term} & ::= & \mathit{Const} \mid \mathit{Var} \mid \mathit{FIde}(\mathit{Term}\{, \mathit{Term}\})
\end{array}
$$

dove

- $\mathit{Var} \in \mathcal{V}$ è un simbolo di **variabile**,
- $\mathit{Const} \in \mathcal{C}$ è un simbolo di **costante**,
- $\mathit{FIde} \in \mathcal{F}$ è un simbolo di **funzione**, e
- $\mathit{PIde} \in \mathcal{P}$ è un simbolo di **predicato**.

Sintassi della Logica del Primo Ordine: i Termini

I **termini** denotano "elementi del dominio di interesse" ("individui").
Sono definiti dalla categoria sintattica *Term*:

$$\mathit{Term} \quad ::= \quad \mathit{Const} \mid \mathit{Var} \mid \mathit{FIde}(\mathit{Term}\{, \mathit{Term}\})$$

- Quindi i termini sono definiti induttivamente, a partire da un alfabeto $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$, nel modo seguente:
  - Ogni costante $c \in \mathcal{C}$ è un termine
  - Ogni variabile $x \in \mathcal{V}$ è un termine
  - Se $f \in \mathcal{F}$ è un simbolo di funzione con arietà n e $t_1, \dots, t_n$ sono termini, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine

Termini: Esempi

- a, con $a \in \mathcal{C}$
- x, con $x \in \mathcal{V}$
- $g(a)$, con $g \in \mathcal{F}$ di arietà 1
- $f(x, g(a))$, con $f \in \mathcal{F}$ di arietà 2
- **Notazione**: I ben noti simboli di funzione binari a volte sono rappresentati con notazione infissa.
- Esempio: $x + (1 * z)$, è un termine con $+, * \in \mathcal{F}$ con arietà 2

Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (1)

Le **formule** rappresentano enunciati dichiarativi. Sono definite induttivamente come segue, fissato un alfabeto $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$:

- Se $p \in \mathcal{P}$ è un simbolo di predicato allora
  - se ha arietà 0 allora p è una formula. Corrisponde a una variabile proposizionale nel CP, e lo scriviamo p invece di $p()$
  - se ha arietà $n > 0$ e $t_1, ..., t_n$ sono termini allora $p(t_1, ..., t_n)$ è una formula.

  Queste sono le formule corrispondenti alla categoria sintattica *Pred*:

$$Pred \quad := \quad PIde \mid PIde(Term\{, Term\})$$

- A volte usiamo **notazione infissa** per simboli di arietà 2.
- Esempio: $x{=}y$ o $z{\leq}f(x)$ con $=, \leq, \in \mathcal{P}$ con arietà 2

Sintassi della Logica del Primo Ordine: le Formule (2)

Le rimanenti categorie sintattiche sono

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{Fbf} & ::= & \\
 & & \mathit{Fbf} \equiv \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \wedge \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \vee \mathit{Fbf} \mid \\
 & & \mathit{Fbf} \Rightarrow \mathit{Fbf} \mid \mathit{Fbf} \ \Leftarrow \ \mathit{Fbf} \\
 & & \mathit{Atom} \mid \neg \mathit{Atom} \\
\mathit{Atom} & ::= & \mathbf{T} \mid \mathbf{F} \mid \mathit{Pred} \mid (\mathit{Fbf}) \mid (\mathit{FbfQuant}) \\
\mathit{FbfQuant} & ::= & (\forall \mathit{Var}.\mathit{Fbf}) \mid (\exists \mathit{Var}.\mathit{Fbf})
\end{array}
$$

e definiscono le formule induttivamente come segue

- **T** e **F** sono formule
- Se P è una formula allora $\neg P$ è una formula
- Se P e Q sono formule allora $P \wedge Q, P \vee Q, P \Rightarrow Q, P \equiv Q, P \ \Leftarrow \ Q$ sono formule
- Se P è una formula e $x \in \mathcal{V}$, allora $(\forall x.P)$ e $(\exists x.P)$
- Se P è una formula allora anche (P) è una formula

Sintassi delle Formule: Esempi

- Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi

$$(\forall x.pari(x) \wedge x{>}2 \Rightarrow \neg primo(x))$$

- Se x è pari allora il successore di x è dispari

$$(\forall x.pari(x) \Rightarrow dispari(x{+}1))$$

- Se x è pari allora $x+1$ è dispari" implica "se 4 è pari allora 5 è dispari

$$(\forall x.pari(x) \Rightarrow dispari(x{+}1) \Rightarrow (pari(4) \Rightarrow dispari(5))$$

Simboli di Variabile? Simboli di Predicato? Simboli di Funzione? Simboli di Costante?

Occorrenze di Variabili Libere o Legate

- In una formula quantificata come $(\forall x.P)$ o $(\exists y.P)$ la sottoformula P è detta la **portata** del quantificatore.
- Una occorrenza di variabile x è **legata** se compare nella portata di un quantificatore altrimenti è detta **libera**.
- Esempio:

$$(\forall y.z = y \wedge (x = y \vee (\exists x.x = z \vee z = y)))$$

  - Portata di $\forall y$?
  - Portata di $\exists x$?
  - Occorrenze di variabili legate?
  - Occorrenze di variabili libere?

Formule Aperte e Chiuse

- Una formula che contiene occorrenze di variabili libere è detta **aperta**
- Spesso scriveremo $P(x)$ per indicare che x è libera nella formula P
- Una formula senza variabili libere è detta **chiusa**. Considereremo principalmente formule chiuse.
- Il nome di una variabile legata può essere cambiato grazie alle leggi di **ridenominazione**:

$$
\begin{array}{lll}
(\forall x.P) \equiv (\forall y.P[y/x]) & \text{se } y \text{ non compare in } P & (\mathit{Ridenom.}) \\
(\exists x.P) \equiv (\exists y.P[y/x]) & \text{se } y \text{ non compare in } P & (\mathit{Ridenom.})
\end{array}
$$

Interpretazione e Semantica

- Come in Calcolo Proposizionale la semantica di una formula chiusa di LPO si determina rispetto ad una **interpretazione**
- Una **interpretazione** assegna la semantica ad una formula chiusa fissando il significato dei simboli che compaiono:
  - Il **dominio** di interesse (un insieme)
  - A quali **elementi** del dominio corrispondono i simboli di costante in $\mathcal{C}$
  - A quali **funzioni** sul dominio corrispondono i simboli di funzione in $\mathcal{F}$
  - A quali **proprietà** o **relazioni** corrispondono i simboli di predicato in $\mathcal{P}$
- Componendo i valori delle formule atomiche nelle formule composte si arriva a stabilire il valore di verità della formula complessiva
- Procedimento simile a quello del calcolo proposizionale, ma reso più complesso dalla necessità di calcolare funzioni e predicati, e dalla presenza dei quantificatori

Esempio: Semantica di Formula dipende da Interpretazione

- Consideriamo la formula chiusa:

$$(\forall x.p(x) \vee q(x))$$

- Intepretazione 1:
  - Il dominio è quello degli esseri umani
  - Il predicato p significa "essere maschio"
  - Il predicato q significa "essere femmina"

  La formula è vera
- Intepretazione 2:
  - Il dominio è quello dei numeri naturali
  - Il predicato p significa "essere numero primo"
  - Il predicato q significa "essere numero pari"

  La formula è falsa

Interpretazione: Definizione Formale

Dato un linguaggio del primo ordine, ovvero fissato un alfabeto $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$, una **intepretazione** $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$ è costituita da:

- Un insieme $\mathcal{D}$, detto dominio dell'intepretazione
- Una funzione di interpretazione α che associa:
  - ad ogni **costante** $c \in \mathcal{C}$ del linguaggio un **elemento** del dominio $\mathcal{D}$, rappresentato da $\alpha(c)$
  - ad ogni **simbolo di funzione** $f \in \mathcal{F}$ di arietà n una funzione $\alpha(f)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un elemento di $\mathcal{D}$. Ovvero

    $$\alpha(f) = \mathcal{D}^n \to \mathcal{D}$$

  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà zero (un simbolo proposizionale) un **valore di verità** indicato da $\alpha(p)$
  - ad ogni **simbolo di predicato** $p \in \mathcal{P}$ di arietà n (un **predicato** n**-ario**), una funzione $\alpha(p)$ che data una n-upla di elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un valore di verità. Ovvero

    $$\alpha(p) = \mathcal{D}^n \to \{\mathbf{T}, \mathbf{F}\}$$

Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (1)

- Finora abbiamo associato un valore di verità alle formule in modo informale: vedremo in seguito la definizione formale della semantica
- Per formalizzare un enunciato **E** dobbiamo fornire:
  - un alfabeto $\mathcal{A} = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathcal{V})$ e un'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$
  - una **formula** del primo ordine che, per l'interpretazione $\mathcal{I}$, sia vera se e solo se l'enunciato **E** è vero

Formalizzazione di Enunciati: Linee Guida (2)

Dato un enunciato **E**, per identificare l'alfabeto $\mathcal{A}$ e l'interpretazione $\mathcal{I} = (\mathcal{D}, \alpha)$

- individuiamo il **dominio** $\mathcal{D}$ di cui parla l'enunciato
- per ogni individuo $d \in \mathcal{D}$ menzionato in **E**, introduciamo un simbolo di **costante** $c \in \mathcal{C}$ e fissiamo $\alpha(c) = d$
- per ogni operatore **op** menzionato in **E** che applicato a elementi di $\mathcal{D}$ restituisce un individuo di $\mathcal{D}$, introduciamo un simbolo di **funzione** $f \in \mathcal{F}$ e fissiamo $\alpha(f) = \mathbf{op}$
- per ogni proprietà di individui o relazione tra individui **R** menzionata in **E**, introduciamo un simbolo di **predicato** $p \in \mathcal{P}$ e fissiamo $\alpha(p) = \mathbf{R}$

Formalizzazione di Enunciati: Esempio

"Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi"

- Dominio: numeri naturali: $\mathbb{N}$
- Elementi del dominio menzionati: "due"
  - Introduciamo la costante $\mathbf{2} \in \mathcal{C}$ con $\alpha(2) = \underline{\mathbf{2}} \in \mathbb{N}$
- Proprietà o relazioni tra naturali menzionate:
  - "n è pari": introduciamo **pari** $\in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{pari})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è pari, **F** altrimenti
  - "n è primo": introduciamo **primo** $\in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\mathbf{pari})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è primo, **F** altrimenti
  - "n è maggiore di m": introduciamo $> \in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(>)(n, m) = \mathbf{T}$ se n è maggiore di m, **F** altrimenti
- Formula:

$$(\forall x.pari(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \neg primo(x))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esempi

- Alberto non segue LPP ma va al cinema con Bruno o con Carlo
- Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema
- Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema

Alfabeto ed Interpretazione

Alberto non segue LPP ma va al cinema con Bruno o con Carlo

- Dominio: l'insieme delle persone
- Costanti: le persone Alberto, Bruno e Carlo. Introduciamo le costanti $A, B, C \in \mathcal{C}$ tali che $\alpha(A) =$"la persona Alberto", $\alpha(B) =$"la persona Bruno" e $\alpha(C) =$"la persona Carlo"
- Operatori sul dominio menzionati: nessun simbolo di funzione
- Proprietà o relazioni tra persone:
    - introduciamo un simbolo di predicato $vaCinema \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(vaCinema)(d) = \mathbf{T}$ se d va al cinema, $\mathbf{F}$ altrimenti
    - introduciamo un simbolo di predicato $segueLPP \in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(segueLPP)(d) = \mathbf{T}$ se d segue LPP, $\mathbf{F}$ altrimenti
    - introduciamo un simbolo di predicato $= \in \mathcal{P}$ con arietà 2 con il significato standard

Formalizzazione di Enunciati: Formule

- Alberto non segue LPP ma va al cinema con Bruno o con Carlo:

$$\neg segueLPP(A) \wedge (vaCinema(A) \wedge (vaCinema(B) \vee vaCinema(C)))$$

- Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema:

$$(\forall x. segueLPP(x) \Rightarrow vaCinema(x))$$

- Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema:
  $(\exists x. segueLPP(x) \wedge \neg vaCinema(x) \wedge$
  $(\forall y. segueLPP(y) \wedge \neg(x = y) \Rightarrow vaCinema(y))$

Formalizzazione di Enunciati: Esercizio (1)

Formalizzare l'enunciato: "Due persone sono parenti se hanno un antenato in comune"

- Dominio: l'insieme delle persone
- Costanti, operatori sul dominio menzionati: nessuno
- Proprietà o relazioni tra persone:
  - "d_1 e d_2 sono parenti": introduciamo *parenti* $\in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(\mathit{parenti})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$ se d_1 e d_2 sono parenti, $\mathbf{F}$ altrimenti
  - "d_1 è antenato di d_2": introduciamo *antenato* $\in \mathcal{P}$ con arietà 2 e $\alpha(\mathit{antenato})(d_1, d_2) = \mathbf{T}$ se d_1 è antenato di d_2, $\mathbf{F}$ altrimenti
- Formula:

$$(\forall x.(\forall y.(\exists z.\mathit{antenato}(z, x) \wedge \mathit{antenato}(z, y)) \Rightarrow \mathit{parenti}(x, y)))$$

Formalizzazione di Enunciati: Esercizio (2)

"Se un numero naturale è pari allora il suo successore è dispari"

- Dominio: numeri naturali: $\mathbb{N}$
- Operatori sul dominio menzionati: "successore"
  - Introduciamo il simbolo **succ** $\in \mathcal{F}$ con arietà 1 e $\alpha(\textbf{succ})(n) = n + 1$
- Proprietà o relazioni tra naturali menzionate:
  - "n è pari": introduciamo **pari** $\in \mathcal{P}$ come prima
  - "n è dispari": introduciamo **dispari** $\in \mathcal{P}$ con arietà 1 e $\alpha(\textbf{dispari})(n) = \mathbf{T}$ se $n \in \mathbb{N}$ è dispari, $\mathbf{F}$ altrimenti
- Formula:

$$(\forall x. pari(x) \Rightarrow dispari(succ(x)))$$