Logica per la Programmazione

Lezione 9

- Logica del Primo Ordine con Insiemi ed Intervalli
- Formalizzazione di Enunciati: Array e Sequenze

Rappresentazioni Intensionali ed Estensionali di Insiemi

- Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- Rappresentazione estensionale (*in extenso*) di insiemi

$$Divisori\_di\_30 = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

- Rappresentazione intensionale (*in intenso*) di insiemi

$$Divisori\_di\_30 = \{x \mid x \leq 30 \wedge (\exists n.x \times n = 30)\}$$

- Rappresentazione intensionale per insiemi infiniti

$$Multipli\_di\_7 = \{x \mid (\exists n.x = n \times 7)\}$$

Notazione per Insiemi

- Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare insiemi di naturali in modo intensionale:

$$Term \quad ::= \quad Const \mid Var \mid FIde(Term\{, Term\},\}) \mid \{Var \mid Fbf\}$$

- Abbiamo termini come $\{x| \; P\}$ dove x è una variabile, e P una formula (solitamente con x libera). x è legata in $\{x| \; P\}$
- Nuovo simbolo di predicato binario $\in$, definito dalla legge:

$$y{\in}\{x \mid P\} \equiv P[y/x] \qquad (\text{def-}\in)$$

- Nuova costante $\emptyset$, definita come

$$\emptyset = \{x \mid \mathbf{F}\}$$

Insieme Vuoto

Dimostriamo che $(\forall y . y \in \emptyset \equiv \mathbf{F})$ è valida:

$$
\begin{array}{ll}
 & y \in \emptyset \ [\text{Per generalizzazione}] \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \emptyset)\} \\
 & y \in \{x \mid \mathbf{F}\} \\
\equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\
 & \mathbf{F}
\end{array}
$$

Leggi per Insiemi: uguaglianza e sottoinsieme

- Inoltre introduciamo due predicati binari $=$ e $\subseteq$ definiti dalle seguenti leggi

$$(\forall x.P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\} \quad (\text{Ins-}\equiv)$$

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\} \quad (\text{Ins-} \Rightarrow)$$

- Dimostriamo la seconda

$$\begin{array}{ll} & z \in \{x \mid P\} \\ \equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\ & P[z/x] \\ \Rightarrow & \quad \{(\text{Ip: } \forall x.P \Rightarrow Q), (\text{Elim-}\forall)\} \\ & Q[z/x] \\ \equiv & \quad \{(\text{Def. di } \in)\} \\ & z \in \{x \mid Q\} \end{array}$$

Uguaglianze e Disuguaglianze

- Estendiamo ora il linguaggio del primo ordine con i predicati binari $\leq$ e $\geq$ (con l'ovvio significato).
- I predicati $=$, $\leq$ e $\geq$ e soddisfano i seguenti assiomi (nei quali la quantificazione universale è implicita):
  - $x = x$ (riflessività-$=$)
  - $x = y \Rightarrow y = x$ (simmetria-$=$)
  - $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$ (transitività-$=$)

  - $x \leq x$ (riflessività-$\leq$)
  - $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisimmetria-$\leq$)
  - $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (transitività-$\leq$)
  - $x \leq y \vee y \leq x$ (totalità-$\leq$)

  - $x \geq y \equiv y \leq x$ (def-$\geq$)

Un po' di Terminologia...

- Una relazione binaria R ($R \subseteq A \times A$) è una **relazione di equivalenza** se è
  - riflessiva: $x\ R\ y$
  - simmetrica: $x\ R\ y \Rightarrow y\ R\ x$
  - transitiva: $(x\ R\ y) \land (y\ R\ z) \Rightarrow (x\ R\ z)$
- Esempio: l'uguaglianza $=$, l'equivalenza $\equiv$
- Una relazione binaria è una **relazione di ordinamento** se è
  - riflessiva, transitiva e anti-simmetrica

$$(x\ R\ y) \land (y\ R\ z) \Rightarrow (x = z)$$

- Esempio: inclusione $\subseteq$ tra insiemi, $\leq$ su numeri naturali
- Una relazione di ordinamento è **totale** se
  - $(x\ R\ y) \lor (y\ R\ x)$
- Esempio: $\leq$ su numeri naturali

Intervalli: Notazione e Definizioni

- Introduciamo le seguenti abbreviazioni sintattiche dati $a, b \in \mathbb{N}$:
  - $[a, b] = \{x | a \leq x \wedge x \leq b\}$ intervallo chiuso
  - $[a, b) = \{x | a \leq x \wedge x < b\}$ intervallo semiaperto a destra
  - $(a, b] = \{x | a < x \wedge x \leq b\}$ intervallo semiaperto a sinistra
  - $(a, b) = \{x | a < x \wedge x < b\}$ intervallo aperto
- Definizione di relazioni ausiliarie:

$$x \neq y \equiv \neg(x = y) \qquad (\text{def}- \neq)$$

$$x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y \qquad (\text{def}- <)$$

$$x > y \equiv x \geq y \wedge x \neq y \qquad (\text{def}- >)$$

Quantificazione ristretta ad un Insieme: Domini

- Spesso la quantificazione (universale o esistenziale) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$
$$(\exists x.P \wedge Q)$$

- In queste formule, la formula P è il dominio del quantificatore
- Si introducono le **seguenti abbreviazioni**:
  $(\forall x.P \Rightarrow Q)$ viene scritta come $(\forall x : P.Q)$
  $(\exists x.P \wedge Q)$ viene scritta come $(\exists x : P.Q)$
- Attenzione: queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.
- **Caso Particolare**: Il dominio P è vuoto se $P[v/x] \equiv \mathbf{F}$ per ogni elemento v del domino di interpretazione (o se $\neg(\exists x.P) \equiv \mathbf{T}$)

Formule Vacuamente Vere

- Una formula quantificata universalmente è **vacuamente** vera se il **dominio è vuoto**.
- Mostriamo che se P è vuoto, allora $(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \mathbf{T}$ indipendentemente da Q.

$$
\begin{array}{ll}
 & \forall x.P \Rightarrow Q \\
\equiv & \quad \{\text{Ip: } P \text{ vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{F}\} \\
 & \forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q \\
\equiv & \quad \{\mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T}\} \\
 & \forall x.\mathbf{T}
\end{array}
$$

- Due casi:
  - Se il dominio di interpretazione non è vuoto allora per (costante): $\forall x.\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$.
  - Se il dominio di interpretazione è vuoto, allora $\forall x.\mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ per la definizione di semantica

Formule Vacuamente Vere

- Dualmente una formula quantificata esistenzialmente è falsa se il **dominio è vuoto**
- Mostriamo infatti che la formula $(\exists x.P \wedge Q)$ è falsa se P è vuoto, indipendentemente da Q.

$$
\begin{array}{ll}
 & (\exists x.P \wedge Q) \\
\Rightarrow & \quad \{(\exists{:}\wedge)\} \\
 & (\exists x.P) \wedge (\exists x.Q) \\
\equiv & \quad \{\text{Ip: } P \text{ vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{F}\} \\
 & (\exists x.\mathbf{F}) \wedge (\exists x.Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{costante}) \text{ se dominio non vuoto, semantica altrimenti}\} \\
 & \mathbf{F} \wedge \exists x.Q \\
\equiv & \quad \{(\text{zero})\} \\
 & \mathbf{F}
\end{array}
$$

Estensione delle Leggi dei Quantificatori alle Formule con Domini

Molte delle leggi per i quantificatori valgono anche quando si quantifica su di un dominio esplicito. Vediamone due (le altre sono sulla dispensa):

- $(\forall x.R \Rightarrow P \land Q) \equiv (\forall x.R \Rightarrow P) \land (\forall x.R \Rightarrow Q)$ $(\forall : \land)$
- $\neg(\exists x.R \land P) \equiv (\forall x.R \Rightarrow \neg P)$ (De Morgan)

Esercizio: si dimostrino queste leggi sfruttando le analoghe leggi senza dominio

Notazione per gli Intervalli

Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo I, che noi eviteremo:

- la formula $(\forall x.x \in I \Rightarrow Q)$ si scrive come $(\forall x \in I.Q)$ o $(\forall x : x \in I.Q)$ per
- la formula $(\exists x.x \in I \wedge Q)$ si scrive come $(\exists x \in I.Q)$ o $(\exists x : x \in I.Q)$

Leggi per Quantificazioni su Domini

Sia **k** un elemento del dominio di interpretazione. Queste leggi mostrano come ridurre la quantificazione sul dominio **P** ad un dominio più piccolo $(P \wedge x \neq \mathbf{k})$:

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } \neg P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \equiv \begin{cases} (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } P[k/x] \\ (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } \neg P[k/x] \end{cases}$$

Dimostrazione Legge per il Quantificatore Universale (1)

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x. P \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Terzo Escluso}), (\text{Unità})\} \\
 & (\forall x. P \wedge (x = k \vee x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Distrib.})\} \\
 & (\forall x. (P \wedge x = k) \vee (P \wedge x \neq k) \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Dominio})\} \\
 & (\forall x. P \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{(\text{Leibniz})\} \\
 & (\forall x. P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)
\end{array}
$$

Dimostrazione Legge per il Quantificatore Universale (2)

Procediamo per casi a dimostrare la legge:

- $P[k/x] \equiv \mathbf{T}$

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{\mathbf{Ip}\text{: } P[k/x] \equiv \mathbf{T} \text{ , (Unità)}\} \\
 & (\forall x.x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{\text{(Singoletto)}\} \\
 & Q[k/x] \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)
\end{array}
$$

- $P[k/x] \equiv \mathbf{F}$

$$
\begin{array}{ll}
 & (\forall x.P[k/x] \wedge x = k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{\mathbf{Ip}\text{: } P[k/x] \equiv \mathbf{F} \text{ , (Zero)}\} \\
 & (\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q) \wedge (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \\
\equiv & \quad \{\mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T}\text{, (costante), (unità)}\} \\
 & (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)
\end{array}
$$

Leggi per Quantificazioni su Intervalli (1)

Presentiamo una specializzazione delle leggi precedenti, quando il dominio è un intervallo. Quindi la formula del dominio è $x \in [a, b)$:

$$(\forall x.x \in [a, b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\forall x.x \in [a, b) \land x \neq k \Rightarrow Q) \land Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\forall x.x \in [a, b) \land x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$

$$(\exists x.x \in [a, b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} (\exists x.x \in [a, b) \land x \neq k \Rightarrow Q) \land Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\exists x.x \in [a, b) \land x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$

Leggi per Quantificazioni su Intervalli (2)

- Altre leggi molto utili nel caso in cui il dominio sia $x \in [a, b]$ l'elemento sia proprio l'estremo dell'intervallo destro o sinistro
-
$$(\forall x.x \in [a, b] \Rightarrow Q) \equiv (\forall x.x \in [a, b) \Rightarrow Q) \wedge Q[b/x] \text{ se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$
$$(\forall x.x \in [a, b] \Rightarrow Q) \equiv (\forall x.x \in (a, b] \Rightarrow Q) \wedge Q[a/x] \text{ se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$
-
$$(\exists x.x \in [a, b] \wedge Q) \equiv (\exists x.x \in [a, b) \wedge Q) \vee Q[b/x] \text{ se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$
$$(\exists x.x \in [a, b] \wedge Q) \equiv (\exists x.x \in (a, b] \wedge Q) \vee Q[a/x] \text{ se } [a, b] \text{ non è vuoto}$$

Specifiche con Array e Sequenze

- Un array a di lunghezza n è rappresentato da una **funzione dall'intervallo** $[0, n) = \{0, 1, ..., n - 1\}$ ad $\mathbb{N}$
- Notazione: $a[i]$ indica il valore i-esimo della funzione (array) a è
- Esempio: $a = \{< 0, 45 >, < 1, 23 >, < 2, 10 >, < 3, 16 >\}$

45	23	10	16

- Nota: il primo elemento ha posizione/indice 0: $a[0] = 45$

Esercizi di Formalizzazione (1)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n, fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

- a è un array con tutti gli elementi uguali a 0

  $$(\forall i . i \in [0, n) \Rightarrow a[i] = 0)$$

  Notazione: il valore i-esimo della funzione (array) a è indicato come $a[i]$
- per ogni elemento di a esiste un elemento di b uguale o più grande

  $$(\forall i . i \in [0, n) \Rightarrow (\exists j . j \in [0, n) \wedge a[i] \leq b[j]))$$

Esercizi di Formalizzazione (2)

Assumendo che a e b siano array di lunghezza n, fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

1. a rappresenta una funzione monotona crescente
2. m è il massimo dell'array a
3. m è l'indice del massimo dell'array a
4. a ha tutti elementi distinti
5. a ha tutti elementi distinti e b è l'array a ordinato in senso crescente.