DIMOSTRAZIONE DI IMPLICAZIONI TAUTOLOGICHE

Corso di Logica per la Programmazione

A.A. 2013/14

Andrea Corradini

VERSO ALTRE TECNICHE DI DIMOSTRAZIONE DI TAUTOLOGIE

- Abbiamo visto dimostrazioni di equivalenze (del tipo $\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$) usando una catena di equivalenze:

$$\mathbf{p} \equiv \dots \equiv \mathbf{q}$$

- Se la tautologia **p** da dimostrare non è un'equivalenza, si può mostrare equivalente a **T:** $\mathbf{p} \equiv \dots \equiv \mathbf{T}$

- Se la formula è del tipo $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$, si può dimostrare anche usando una catena di equivalenze/implicazioni:

$$\mathbf{p} \equiv \dots \Rightarrow \dots \equiv \dots \Rightarrow \mathbf{q}$$

  usando per giustificazioni, equivalenze o implicazioni tautologiche. Vediamo come...

ALCUNE IMPORTANTI LEGGI DERIVATE

- Hanno un'implicazione come connettivo principale
- Usate come giustificazioni in prove di implicazioni
- *Diamo anche forma disambiguata con parentesi*

- $\mathbf{p \land (p \Rightarrow q) \Rightarrow q}$ (Modus Ponens)

  $(p \land (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
- $\mathbf{p \land q \Rightarrow p}$ (Sempl.-$\land$)

  $(p \land q) \Rightarrow p$
- $\mathbf{p \Rightarrow p \lor q}$ (Intro.-$\lor$)

  $p \Rightarrow (p \lor q)$

CORRETTEZZA DI MODUS PONENS E SEMPL-$\wedge$

$\mathbf{p \wedge (p \Rightarrow q) \;\Rightarrow\; q}$ **(Modus Ponens)**

$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$ }

$p \wedge (\sim p \vee q) \;\Rightarrow\; q$

$\equiv$ {Complemento}

$\mathbf{p \wedge q \;\Rightarrow q}$ **(Sempl.-$\wedge$)**

$\equiv$ {Elim-$\Rightarrow$ }

$\sim(p \wedge q) \vee q$

$\equiv$ {DeMorgan}

$\sim p \vee \sim q \vee q$

$\equiv$ {TerzoEscluso, Zero}

T

VERSO LA DIMOSTRAZIONE DI IMPLICAZIONI TAUTOLOGICHE

- Posso impostare la dimostrazione che $\mathbf{P_1} \Rightarrow \mathbf{P_k}$ così:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{P_1} & \\
\equiv & \{\text{giustificazione}_1\} \\
\quad \ldots & \\
\equiv & \{\text{giustificazione}_h\} \\
\quad \mathbf{P} & \\
\Rightarrow & \{\, \mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{Q} \,\} \\
\quad \mathbf{Q} & \\
\equiv & \{\text{giustificazione}_{h+1}\} \\
\quad \ldots & \\
\equiv & \{\text{giustificazione}_{k-1}\} \\
\mathbf{P_k} &
\end{array}
$$

ESEMPIO - TOLLENDO PONENS

- Usando la legge possiamo dimostrare

$$p \wedge q \Rightarrow q \quad \text{(Sempl-}\wedge\text{)}$$

$$\mathbf{(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q} \qquad \text{(Tollendo Ponens)}$$

$$
\begin{array}{ll}
& \mathbf{(p \vee q) \wedge \sim p} \\
\equiv & \{ \text{ Doppia Negazione e Complemento } \} \\
& q \wedge \sim p \\
\Rightarrow & \{ \text{ Sempl.-}\wedge \text{ } \} \\
& \mathbf{q}
\end{array}
$$

- Si noti che abbiamo applicato (Sempl-$\wedge$) all'intera proposizione $q \wedge \sim p$

VALE UN PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER L'IMPLICAZIONE ?

- Il principio di sostituzione stabilisce che se $\mathbf{P \equiv Q}$, allora $\mathbf{R \equiv R[Q/P]}$
- E' valido un analogo principio di sostituzione per l'implicazione?

  "Se $\mathbf{P \Rightarrow Q}$, allora $\mathbf{R \Rightarrow R[Q/P]}$" (???)

- In generale **NO**. Infatti:

$$\begin{array}{l} \quad \mathbf{Z \Rightarrow U \wedge V} \\ \mathbf{\Rightarrow \{ \text{Sempl-}\wedge \}} \\ \quad \mathbf{Z \Rightarrow U} \end{array}$$

OK

$$\begin{array}{l} \quad \mathbf{U \wedge V \Rightarrow Z} \\ \mathbf{\Rightarrow \{ \text{Sempl-}\wedge \}} \\ \quad \mathbf{U \Rightarrow Z} \end{array}$$

NO

ANALOGIA CON DISUGUAGLIANZE ALGEBRICHE

- Una situazione del tutto analoga si incontra nella dimostrazione di disuguaglianze algebriche
- Quali delle seguenti deduzioni sono corrette?

$$\begin{array}{l} \quad a - c \\ \leq \quad \{ a \leq b \} \\ \quad b - c \end{array}$$

OK

$$\cancel{\begin{array}{l} \quad a - c \\ \leq \quad \{ c \leq d \} \\ \quad a - d \end{array}}$$

NO

$$\begin{array}{l} \quad a - c \\ \geq \quad \{ c \leq d \} \\ \quad a - d \end{array}$$

OK

- Si noti che **a** compare *positivamente* in **(a - c)**, ma **c** vi compare *negativamente*. Per questo nel secondo caso il segno di disuguaglianza va invertito.

OCCORRENZE POSITIVE E NEGATIVE

- Diciamo che **p occorre *positivamente* in**

  $\mathbf{p} \qquad \mathbf{p \vee q} \qquad \mathbf{p \wedge q} \qquad \mathbf{q \Rightarrow p}$

- mentre **p occorre *negativamente* in**

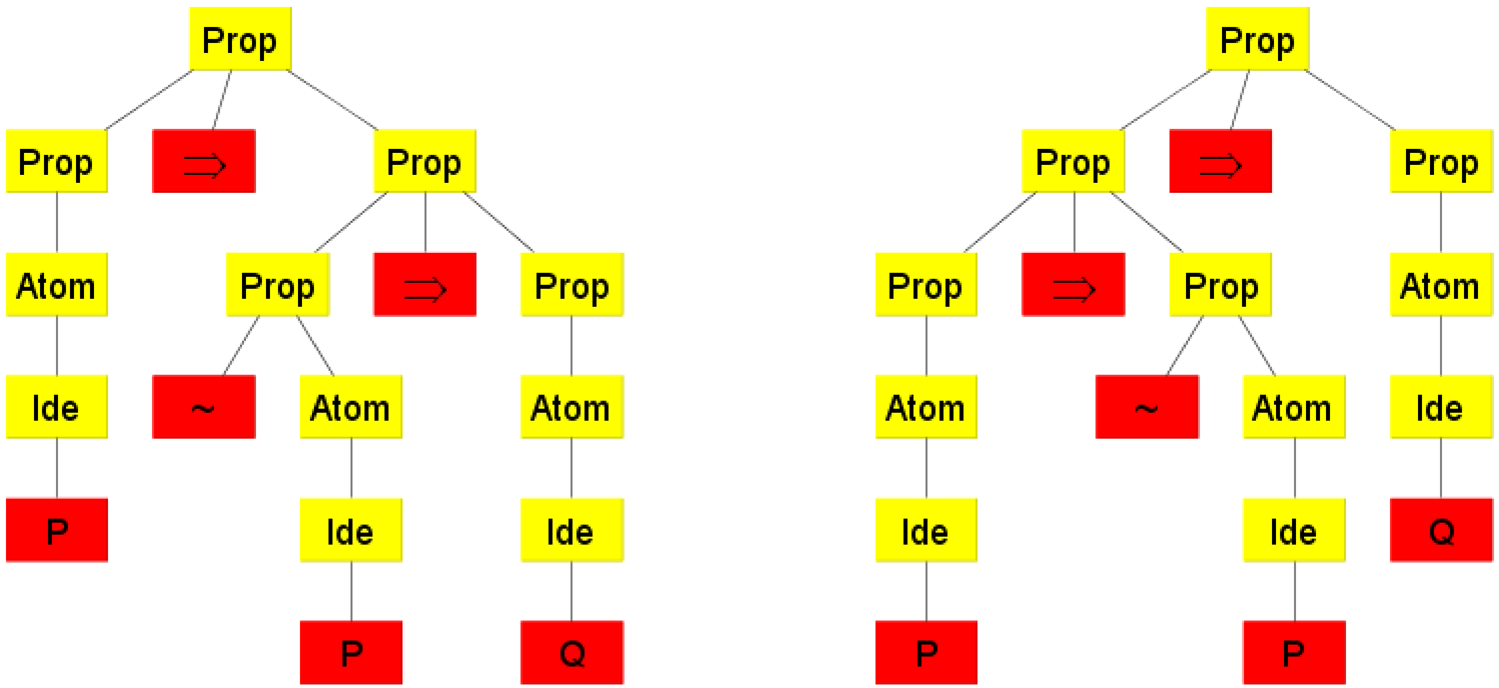
  $\mathbf{\sim p}$

  $\mathbf{p \Rightarrow q}$ (si ricordi che $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$)

- Se **p** compare in **Q** a livello più profondo, si contano le **occorrenze negative** da **p** fino alla radice di **Q**:
  - se sono pari, **p occorre *positivamente* in Q**
  - se sono dispari **p occorre *negativamente* in Q**
- Attenzione: **p** può occorrere sia negativamente che positivamente in **Q**

OCCORRENZE POSITIVE E NEGATIVE: ESEMPI CON ALBERI DI DERIVAZIONE

- Consideriamo gli alberi di derivazione per $\mathbf{P \Rightarrow \sim P \Rightarrow Q}$



$\mathbf{P \Rightarrow [\sim P \Rightarrow Q\,]}$ $\qquad$ $\mathbf{[\,P \Rightarrow \sim P] \Rightarrow Q}$

- Esercizio: come compaiono **P** e **Q**?

OCCORRENZE POSITIVE E NEGATIVE: ESEMPI

- Come occorre **p** nelle seguenti proposizioni?
  - $(q \wedge p \wedge r) \vee s$
  - $q \Rightarrow \sim (p \wedge r)$
  - $(\sim p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow s$
  - $\sim p \wedge q \Rightarrow (r \Rightarrow s)$
  - $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
- Se ci sono più occorrenze di **p**, indicheremo esplicitamente quale ci interessa.
  - $p \Rightarrow (q \vee p \Rightarrow q \vee \sim s)$
  - $p \Rightarrow (q \vee p \Rightarrow q \vee \sim s)$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE PER L'IMPLICAZIONE

- Se abbiamo stabilito che
  - $P \Rightarrow Q$
  - P occorre ***positivamente*** in R

  allora vale

  $$R \Rightarrow R\,[Q/P]$$

- Se abbiamo stabilito che
  - $P \Rightarrow Q$
  - P occorre ***negativamente*** in R

  allora vale

  $$R \Leftarrow R\,[Q/P]$$

DIMOSTRAZIONE DI IMPLICAZIONI: ESEMPI

- $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

$p \wedge q \Rightarrow q$ (Sempl-$\wedge$)

$p \Rightarrow q \wedge r$

$\Rightarrow$ { (Sempl.-$\wedge$), $q \wedge r$ occorre positivamente }

$p \Rightarrow q$

- $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Partiamo dalla conseguenza:

$p \Rightarrow p \vee q$ (Intro.-$\vee$)

$(p \Rightarrow r)$

$\Leftarrow$ { (Intro.-$\vee$), p occorre negativamente }

$(p \vee q \Rightarrow r)$

FORME NORMALI

- Usando le leggi ogni proposizione può essere trasformata in una *forma normale*. Si considerano due tipi:
- Forma normale **congiuntiva**

  $$(\mathbf{p_1} \vee \mathbf{p_2} \vee \ldots) \wedge (\mathbf{q_1} \vee \mathbf{q_2} \vee \ldots) \wedge \ldots$$

- Forma normale **disgiuntiva**

  $$(\mathbf{p_1} \wedge \mathbf{p_2} \wedge \ldots) \vee (\mathbf{q_1} \wedge \mathbf{q_2} \wedge \ldots) \vee \ldots$$

  dove $\mathbf{p_1}\ \mathbf{p_2} \ldots \mathbf{q_1}\ \mathbf{q_2} \ldots$ sono variabili proposizionali, *eventualmente negate*
- Utili per dimostrare equivalenza di formule, riducendole in forma normale e verificando se sono equivalenti
- Spesso ridurre a forma normale aumenta la dimensione della formula, perché bisogna usare distributività

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

- $\mathbf{(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \Rightarrow (q \vee r)}$ (Risoluzione)
- Questa legge permette di semplificare una formula in ***forma normale congiuntiva***. E' il meccanismo di calcolo alla base della ***programmazione logica***.

$\mathbf{(p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)}$

$\equiv$ {(Elim- $\Rightarrow$), 2 volte}

$(\sim q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)$

$\Rightarrow$ {(Transitività- $\Rightarrow$)}

$\sim q \Rightarrow r$

$\equiv$ {(Elim- $\Rightarrow$)}

$\mathbf{q \vee r}$

- Quindi la risoluzione corrisponde alla transitività dell'implicazione.
- Esercizio: dimostrare la legge senza usare la legge (Elim- $\Rightarrow$)