LOGICA DEL PRIMO ORDINE: MOTIVAZIONI, SINTASSI E INTERPRETAZIONI

Corso di Logica per la Programmazione

A.A. 2013

Andrea Corradini

LIMITI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Nella formalizzazione di enunciati dichiarativi, gli ***enunciati atomici*** non hanno struttura (sono rappresentati da variabili proposizionali)
  - **Es**: “Alberto va al cinema con Bruno o va al teatro con Carlo”

    Introduciamo 4 proposizioni atomiche:
    - AC $\equiv$ Alberto va al cinema
    - BC $\equiv$ Bruno va al cinema
    - AT $\equiv$ Alberto va al teatro
    - CT $\equiv$ Carlo va al teatro
  - Formula proposizionale: $\mathbf{(AC \land BC) \lor (AT \land CT)}$
  - Ma “Alberto” “Bruno”... “cinema” ..., gli ***individui*** del nostro discorso e le relazioni tra di essi (“andare al”) scompaiono...

LIMITI DEL CALCOLO PROPOSIZIONALE

- Le formule proposizionali possono descrivere relazioni logiche tra un numero **finito** di enunciati, ma
  - Vorremmo esprimere proprietà di un'**infinità** di individui:

    "tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi"

    In CP(?): ("4 non è primo") $\wedge$ ("6 non è primo") $\wedge$ ... **NO!**
  - Vorremmo poter esprimere proprietà "generali" come

    "se x è pari allora x+1 è dispari"
  - ... e riconoscere che da esse derivano proprietà specifiche come

    "se 4 è pari allora 5 è dispari"
- Anche se descriviamo un numero finito di enunciati, vorremmo poterli descrivere in modo "compatto":
  - Es: "Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema"
    - (S1 $\wedge$ S2 $\wedge$ S3 $\wedge$ ....S141 $\wedge$ S142) **???**
  - Es: "Tutti gli studenti di LPP tranne uno...." **????**

VERSO LA LOGICA DEL PRIMO ORDINE

- Presenteremo sintassi, semantica e “proof system” di una logica che estende il Calcolo Proposizionale.

  Con le formule della **Logica del Primo Ordine** (**LP1**):
  - si possono denotare/rappresentare esplicitamente gli elementi del dominio di interesse (gli **individui**, usando i **termini**)
  - si possono esprimere **proprietà** di individui e **relazioni** tra due o più individui (usando i **predicati**)
  - si può **quantificare** una proprietà, dicendo che vale per almeno un individuo, o per tutti gli individui (idem per le relazioni)
- La **semantica** di una formula del **LP1** è sempre un valore booleano, ma determinato in modo molto più complesso
- Come per il Calcolo Proposizionale, ci interessano le formule che sono “sempre vere” (**valide**)
- Non esistono tabelle di verità: per vedere se una formula è valida occorre dimostrarlo (e non sempre è possibile)

ESPRESSIVITA' DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE

- Esempi (li analizzeremo meglio in seguito):
  - Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi
    $(\forall x.\ pari(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \sim primo(x))$
  - Se x è pari allora x+1 è dispari (*)
    $(\forall x.\ pari(x) \Rightarrow dispari(x + 1))$
  - (*) implica "se 4 è pari allora 5 è dispari"
    $(\forall x.\ pari(x) \Rightarrow dispari(x + 1)) \Rightarrow (pari(4) \Rightarrow dispari(5))$
  - Tutti gli studenti di LPP vanno al cinema
    $(\forall x.\ segue(x, LPP) \Rightarrow vaCinema(x))$
  - Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema
    $(\exists x.\ segue(x, LPP) \wedge \sim vaCinema(x) \wedge$
    $(\forall y.\ segue(y, LPP) \wedge \sim(x = y) \Rightarrow vaCinema(y)))$

LA SINTASSI DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: L'ALFABETO

- Un **alfabeto** del primo ordine comprende:
  - Un insieme ***V*** di simboli di **variabile**
  - Un insieme ***C*** di simboli di **costante**
  - Un insieme ***F*** di simboli di **funzione,** ognuno con la sua **arietà** (o **numero di argomenti**)
  - Un insieme ***P*** di simboli di **predicato,** ognuno con la sua **arietà**
  - I simboli **~, ∧, ∨, ⇒, ≡** (***connettivi logici***)
  - I simboli ∀, ∃ (***quantificatori***)
  - I simboli **(** **)** [parentesi] **,** [virgola] **.** [punto]

LA SINTASSI DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: LA GRAMMATICA

Fbf ::= Fbf ≡ Fbf | Fbf ∧ Fbf | Fbf ∨ Fbf | Fbf ⇒ Fbf | Atom | ~Atom

Atom ::= **T** | **F** | Pred | (Fbf) | FbfQuant

FbfQuant ::= (∀Var.Fbf) | (∃Var.Fbf)

Pred ::= PIde | PIde (Term {, Term})

Term ::= Const | Var | FIde (Term {, Term})

dove Var ∈ ***V*** è un simbolo di **variabile**,

Const ∈ ***C*** è un simbolo di **costante**,

FIde ∈ ***F*** è un simbolo di **funzione**, e

PIde ∈ ***P*** è un simbolo di **predicato**.

- Estende la grammatica del Calcolo Proposizionale con nuove produzioni

LA SINTASSI DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: I TERMINI

Term ::= Const | Var | FIde (Term {, Term})

- I termini denotano "elementi del dominio di interesse" ("individui"). Sono costruiti induttivamente così:
  - Ogni costante in ***C*** è un termine
  - Ogni variabile in ***V*** è un termine
  - Se f è un simbolo di funzione in ***F*** con arietà n e $t_1, \dots, t_n$ sono termini, allora $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine
- Esempi:
  - x $\quad$ x ∈ ***V***
  - a $\quad$ a ∈ ***C***
  - g(a) $\quad$ g ∈ ***F*** con arietà 1
  - f(x,g(a)) $\quad$ f ∈ ***F*** con arietà 2

Notazione: I simboli di funzione **binari** a volte sono rappresentati con **notazione infissa**. Es:
x + (a * g(x)) è un termine
con +, * ∈ ***F*** con arietà 2

LA SINTASSI DELLA LOGICA DEL PRIMO ORDINE: LE FORMULE

- Le formule rappresentano gli enunciati dichiarativi
  - Se $p \in \boldsymbol{P}$ è un simbolo di predicato con arietà n e $t_1, \dots, t_n$ sono termini allora $p(t_1, \dots, t_n)$ è una formula.
  - Se $p \in \boldsymbol{P}$ ha arietà 0 (zero) è detto **formula atomica**. Corrisponde a una variabile proposizionale nel Calcolo Proposizionale, e lo scriviamo p invece di $p(\,)$
  - A volte usiamo **notazione infissa** per simboli di arietà 2
    Es: $x = y$ $z \leq f(x)$ con $=, \leq \in \boldsymbol{P}$ con arietà 2
  - Se P è una formula allora $\sim P$ è una formula
  - Se P e Q sono formule allora $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$, $P \equiv Q$ sono formule
  - Se P è una formula e $x \in \boldsymbol{V}$, allora $(\forall x.P)$ "**per ogni x vale *P***" e $(\exists x.P)$ "**esiste un x tale che *P***" sono formule
  - Se P è una formula allora anche (P) è una formula

SINTASSI DELLE FORMULE: ESEMPI

- Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi

  $(\forall x.\ pari(x) \wedge x > 2 \Rightarrow \sim primo(x))$
- Se x è pari allora il successore di x è dispari

  $(\forall x.\ pari(x) \Rightarrow dispari(succ(x)))$
- "Se x è pari allora x+1 è dispari" implica "se 4 è pari allora 5 è dispari"

  $(\forall x.\ pari(x) \Rightarrow dispari(x + 1)) \Rightarrow (pari(4) \Rightarrow dispari(5))$
- Tutti gli studenti di LPP tranne uno vanno al cinema

  $(\exists x.\ segue(x, LPP) \wedge \sim vaCinema(x) \wedge$
  $(\forall y.\ segue(y, LPP) \wedge \sim(x = y) \Rightarrow vaCinema(y)))$

Simboli di Variabile? **Simboli di Costante?**

Simboli di Funzione? **Simboli di Predicato?**

OCCORRENZE DI VARIABILI LIBERE E LEGATE

- In una formula quantificata come ($\exists x. P$) o ($\forall y. P$) la sottoformula P è detta la **portata** del quantificatore.

- Una occorrenza di variabile x è **legata** se compare nella portata di un quantificatore $\exists x$ oppure $\forall x$. Altrimenti è detta **libera**.
- Es: $(\forall y.\ z = y \lor (x = y \land (\exists x.\ x = z \lor z = y)))$
  - Portata di $\exists x$?
  - Portata di $\forall y$?
  - Occorrenze di variabili legate ?
  - Occorrenze di variabili libere ?

FORMULE APERTE E CHIUSE

- Il nome di una variabile legata può essere cambiato grazie alle **leggi di ridenominazione**:

  $(\forall x.P) \equiv (\forall y.P[y/x])$ se y non compare in P (Ridenom.)

  $(\exists x.P) \equiv (\exists y.P[y/x])$ se y non compare in P (Ridenom.)

- Una formula che contiene occorrenze di variabili libere è detta **aperta**
  - Spesso scriveremo P(x) per indicare che x è libera nella formula P
- Una formula senza variabili libere è detta **chiusa**. Considereremo principalmente formule chiuse.

INTERPRETAZIONI E SEMANTICA

- Una **intepretazione** assegna la semantica ad una formula chiusa fissando il significato dei simboli che compaiono:
  - Il **dominio** di interesse (un insieme)
  - A quali **elementi** del dominio corrispondono i simboli in ***C***
  - A quali **funzioni** sul dominio corrispondono i simboli in ***F***
  - A quali **predicati** (**proprietà** o **relazioni**) corrispondono i simboli in ***P***
  - Componendo i valori delle formule atomiche nelle formule composte si arriva a stabilire il valore della formula complessiva
- Procedimento simile a quello del calcolo proposizionale, ma più complesso dalla necessità di calcolare funzioni e predicati, e dalla presenza dei quantificatori

ESEMPIO: SEMANTICA DI FORMULA DIPENDE DA INTERPRETAZIONE

- Consideriamo la formula:

  $(\forall x.\ p(x) \vee q(x))$
- Intepretazione 1:
  - Il dominio è quello degli esseri umani
  - Il predicato p significa "essere maschio"
  - Il predicato q significa "essere femmina"
    - La formula è vera
- Interpretazione 2:
  - Il dominio è quello dei numeri naturali
  - Il predicato p significa "essere numero primo"
  - Il predicato q significa "essere numero pari"
    - La formula è falsa

INTERPRETAZIONE: DEFINIZIONE FORMALE

- Dato un linguaggio del primo ordine, ovvero fissati ***C***, ***F***, ***V***, ***P***, una **intepretazione I** = (***D***,α) è costituita da:
  - Un insieme ***D***, detto dominio di intepretazione
  - Una funzione di associazione $\boldsymbol{\alpha}$ che associa:
    - ad ogni **costante** c $\in$ ***C*** del linguaggio **un elemento** di ***D***, rappresentato da α(c)
    - ad ogni **simbolo di funzione** f $\in$ ***F*** di arietà *n* **una funzione** α(f) che data una *n*-upla di elementi di ***D*** restituisce un elemento di ***D***
    - ad ogni simbolo di predicato p $\in$ ***P*** di arietà zero (un **atomo**) un **valore di verità**
    - ad ogni **simbolo di predicato** p $\in$ ***P*** di arietà *n* **un predicato *n*-ario**, cioè a funzione che data una *n*-upla di elementi di ***D*** restituisce un valore di verità

ESEMPIO DI SEMANTICA: ALFABETO E INTERPRETAZIONI

- Sia dato l'alfabeto
  - ***C*** = {**a**, **b**, **c**} ***F*** = {} ***P*** = {**p**} ***V*** = {x, y, ...}
- Interpretazione I_1
  - **Dominio**: le città italiane
  - Le costanti sono **Milano**, **Roma**, **Pontedera**, corrispondenti a **a**, **b** e **c**
  - **p**(x) ≡ **T** se **x** è capoluogo di provincia, **F** altrimenti
- Interpretazione I_2
  - **Domino**: l'insieme di numeri naturali {**5**, **10**, **15**}
  - Le costanti sono **5**, **10**, e **15** corrispondenti a **a**, **b** e **c**
  - **p**(x) ≡ **T** se **x** è multiplo di **5**, **F** altrimenti
- Interpretazione I_3
  - come I_2, ma **Dominio**: i numeri naturali

ESEMPIO DI SEMANTICA: VALORE DI VERITA' DI FORMULE

	Dominio	**a**	**b**	**c**	**p(x)**
I_1	città italiane	Milano	Roma	Pontedera	x capoluogo
I_2	{5,10,15}	5	10	15	x multiplo di 5
I_3	numeri naturali	5	10	15	x multiplo di 5

Formula	**Valore in I_1**	**Valore in I_2**	**Valore in I_3**
p(a)	T	T	T
p(b)	T	T	T
p(c)	F	T	T
$p(a) \wedge p(c)$	F	T	T
$(\exists x.p(x))$	T	T	T
$(\forall x.p(x))$	F	T	F
$(\exists x.p(x)) \wedge (\exists y.\sim p(y))$	T	F	T

FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: LINEE GUIDA

- Per formalizzare un enunciato **E** dobbiamo fornire:
  - un alfabeto **A** = (***C***, ***F***, ***P***, ***V***) e un'interpretazione **I** = **(*D*,α)**
  - una **formula** del primo ordine che, per l'interpretazione **I**, sia vera se e solo se l'enunciato **E** è vero
- Finora abbiamo associato un valore di verità alle formule in modo informale: vedremo in seguito la definizione formale della semantica

FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: LINEE GUIDA

Dato un enunciato ***E***, per identificare l'alfabeto **A** e l'interpretazione **I** = (***D***,α):

- individuiamo il dominio ***D*** di cui parla l'enunciato
- per ogni individuo **d**$\in$ ***D*** menzionato in ***E***, introduciamo un simbolo di **costante** c$\in$ ***C*** e fissiamo α(c) **= d**
- per ogni operatore **op** menzionato in ***E*** che applicato a elementi di ***D*** restituisce un individuo di ***D***, introduciamo un simbolo di **funzione** f$\in$ ***F*** e fissiamo α(f) **= op**
- per ogni formula atomica, proprietà di individui o relazione tra individui **R** menzionata in ***E***, introduciamo un simbolo di **predicato** p $\in$ ***P*** e fissiamo α(p) **= R**

FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: ESEMPIO

- **E** = "Tutti i numeri pari maggiori di due non sono primi"
  - Dominio: numeri naturali $\aleph$ (o anche: numeri interi)
  - Elementi del dominio menzionati in **E**: "due"
    - Introduciamo la costante $\mathbf{2} \in C$ con $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{2}) = \underline{2} \in \aleph$
  - Proprietà o relazioni tra naturali menzionate in **E**:
    - "n è pari": introduciamo **pari** $\in$ ***P*** con arietà 1 e $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{pari})(n) \equiv \mathbf{T}$ se $n \in \aleph$ è pari, **F** altrimenti
    - "n è primo": introduciamo **primo** $\in$ ***P*** con arietà 1 e $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{primo})(n) \equiv \mathbf{T}$ se $n \in \aleph$ è primo, **F** altrimenti
    - "n è maggiore di m": introduciamo $>$ $\in$ ***P*** con arietà 2 e $\boldsymbol{\alpha}(n > m) \equiv \mathbf{T}$ se n è maggiore di m, **F** altrimenti
  - Formula: $(\forall \mathbf{x}.\ \mathbf{pari(x)} \wedge \mathbf{x} > \mathbf{2} \Rightarrow \sim\mathbf{primo(x)})$

FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: ESEMPIO

- **E** = "Se x è pari allora il successore di x è dispari"
  - Dominio: numeri naturali $\aleph$
  - Operatori sul dominio menzionati in **E**: "successore"
    - Introduciamo il simbolo **succ** $\in$ $\boldsymbol{F}$ con arietà 1 e $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{succ})(n) = n + 1$.
  - Proprietà o relazioni tra naturali menzionate in **E**:
    - "n è pari": introduciamo **pari** $\in$ $\boldsymbol{P}$ come prima
    - "n è dispari": introduciamo **dispari** $\in$ $\boldsymbol{P}$ con arietà 1 e $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{dispari})(n) \equiv \mathbf{T}$ se $n \in \aleph$ è dispari, **F** altrimenti
  - Formula: ($\forall$x. pari(x) $\Rightarrow$ dispari(succ(x)))

FORMALIZZAZIONE DI ENUNCIATI: ESEMPIO

- **E** = "Due persone sono parenti se hanno un antenato in comune"
  - Dominio: l'insieme delle persone
  - Costanti, operatori menzionati in **E**: nessuno
  - Proprietà o relazioni tra persone menzionate in **E**:
    - "d_1 e d_2 sono parenti": introduciamo **parenti** $\in$ ***P*** con arietà 2 e $\boldsymbol{\alpha}$(**parenti**)(d_1,d_2) $\equiv$ **T** se d_1 e d_2 sono parenti, **F** altrimenti
    - "d_1 è antenato di d_2": introduciamo **antenato** $\in$ ***P*** con arietà 2 e $\boldsymbol{\alpha}$(**antenato**)(d_1,d_2) $\equiv$ **T** se d_1 è antenato di d_2, **F** altrimenti
  - Formula:

$$((\forall\ x, y.\ (\exists\ z.\ antenato(z,x) \wedge antenato(z,y)) \Rightarrow parenti(x,y))$$