



# LOGICA DEL PRIMO ORDINE CON INSIEMI E INTERVALLI

Corso di Logica per la Programmazione  
A.A. 2010/11

*Andrea Corradini, Paolo Mancarella*

# RAPPRESENTAZIONI INTENSIONALI ED ESTENSIONALI DI INSIEMI

- Assumiamo come universo i naturali e i sottoinsiemi di naturali
- Rappresentazione estensionale (*in extenso*) di insiemi  
$$\text{Divisori\_di\_30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$
- Rappresentazione intensionale (*in intenso*) di insiemi  
$$\text{Divisori\_di\_30} = \{x \mid x \leq 30 \wedge (\exists n. x \times n = 30)\}$$
- Rappresentazione intensionale per insiemi infiniti  
$$\text{Multipli\_di\_7} = \{x \mid (\exists n. x = n \times 7)\}$$



# NOTAZIONE PER INSIEMI

- Estendiamo il linguaggio del primo ordine per rappresentare insiemi di naturali in modo intensionale
  - $\text{Term} ::= \text{Const} \mid \text{Var} \mid \text{FId}(\text{Term } \{, \text{Term}\}) \mid \text{'\{ ' Var ' | ' Fbf ' \}'}$
  - Abbiamo termini come  $\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \}$  dove  $\mathbf{x}$  è una variabile, e  $\mathbf{P}$  una formula (tipicamente con  $\mathbf{x}$  libera).  $\mathbf{x}$  è legata in  $\{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \}$
  - Nuovo simbolo di predicato binario  $\in$ , definito dalla legge:  
(def- $\in$ )  $\mathbf{y} \in \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{P} \} \equiv \mathbf{P}[\mathbf{y}/\mathbf{x}]$
  - Nuova costante  $\emptyset$ , definita come  $\emptyset = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{F} \}$
  - Dimostriamo che  $(\forall y. y \in \emptyset \equiv \mathbf{F})$  è valida:  
 $y \in \emptyset$  [Per generalizzazione]  
 $\equiv \{ \text{def di } \emptyset \}$   
 $y \in \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{F} \}$   
 $\equiv \{ \text{def di } \in \}$   
 $\mathbf{F}$



# LEGGI PER INSIEMI

- (Ins:  $\equiv$ )

$$(\forall x. P \equiv Q) \Rightarrow \{x \mid P\} = \{x \mid Q\}$$

- (Ins:  $\Rightarrow$ )

$$(\forall x. P \Rightarrow Q) \Rightarrow \{x \mid P\} \subseteq \{x \mid Q\}$$

- Dimostriamo la seconda

$$z \in \{x \mid P\}$$

$$\equiv \quad \{\text{def-}\in\}$$

$$P [z/x]$$

$$\Rightarrow \quad \{\text{Ip: } (\forall x. P \Rightarrow Q), \text{Elim-}\forall\}$$

$$Q [z/x]$$

$$\equiv \quad \{\text{def-}\in\}$$

$$z \in \{x \mid Q\}.$$



# UGUAGLIANZE E DISUGUAGLIANZE

Estendiamo ora il linguaggio del primo ordine con i predicati binari  $\leq$  e  $\geq$  (con l'ovvio significato).

I predicati  $=$ ,  $\leq$  e  $\geq$  soddisfano i seguenti assiomi (nei quali la quantificazione universale è implicita):

- $x = x$  (riflessività= $=$ )
- $(x = y) \Rightarrow (y = x)$  (simmetria= $=$ )
- $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$  (transitività= $=$ )

- $x \leq x$  (riflessività- $\leq$ )
- $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)$  (antisimmetria- $\leq$ )
- $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$  (transitività- $\leq$ )
- $(x \leq y) \vee (y \leq x)$  (totalità- $\leq$ )
- $(x \geq y) \equiv (y \leq x)$  (def- $\geq$ )



# UN PO' DI TERMINOLOGIA...

- Una relazione binaria  $R$  è una **relazione di equivalenza** se è
  - riflessiva:  $x R x$
  - simmetrica:  $x R y \Rightarrow y R x$
  - transitiva:  $(x R y) \wedge (y R z) \Rightarrow x R z$
  - Esempio: l'uguaglianza  $=$ , l'equivalenza  $\equiv$
- Una relazione binaria è una **relazione di ordinamento** se è
  - riflessiva, transitiva e anti-simmetrica:  $(x R y) \wedge (y R x) \Rightarrow x = y$
  - Esempio: inclusione tra insiemi
- Una relazione di ordinamento è **totale** se
  - per ogni  $x, y$   $(x R y) \vee (y R x)$
  - Esempio:  $\leq$  su numeri naturali



# INTERVALLI: NOTAZIONE E DEFINIZIONI

Introduciamo le seguenti abbreviazioni sintattiche,  $a, b \in \mathbf{N}$ :

- $[a, b] = \{x \mid a \leq x \wedge x \leq b\}$  intervallo chiuso
- $[a, b) = \{x \mid a \leq x \wedge x < b\}$  intervallo semiaperto a destra
- $(a, b] = \{x \mid a < x \wedge x \leq b\}$  intervallo semiaperto a sinistra
- $(a, b) = \{x \mid a < x \wedge x < b\}$  intervallo aperto

Definizione di relazioni ausiliarie:

- $x \neq y \equiv \sim(x = y)$  (def- $\neq$ )
- $x < y \equiv x \leq y \wedge x \neq y$  (def- $<$ )
- $x > y \equiv x \geq y \wedge x \neq y$  (def- $>$ )



# RELAZIONI TRA DISUGUAGLIANZE

## ○ Leggi ( $\sim$ - $\leq$ )

- $\sim(x \leq y) \equiv x > y$
- $\sim(x \geq y) \equiv x < y$

## ○ Dimostriamo la prima, usando il seguente lemma:

$$x \neq y \equiv \sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y)$$

[con antisimm- $\leq$ , rifl- $\leq$ ]

## ○ Esercizi:

- $\sim(x < y) \equiv x > y \vee x = y$
- $\sim(x > y) \equiv x < y \vee x = y$

$$x > y$$

$$\equiv \{\text{def-}\rightarrow\}$$

$$x \geq y \wedge x \neq y$$

$$\equiv \{\text{lemma}\}$$

$$(x \geq y) \wedge (\sim(x \leq y) \vee \sim(x \geq y))$$

$$\equiv \{\text{complemento}\}$$

$$x \geq y \wedge \sim(x \leq y)$$

$$\sim(x \leq y)$$

$$\equiv \{\text{totalità, } P \wedge T = P\}$$

$$\sim(x \leq y) \wedge (x \geq y \vee x \leq y)$$

$$\equiv \{\text{complemento}\}$$

$$\sim(x \leq y) \wedge x \geq y$$





# QUANTIFICAZIONE RISTRETTA A UN INSIEME: DOMINI

- Spesso la quantificazione (universale o esistenziale) è ristretta agli elementi che soddisfano una formula
- Si introducono le seguenti **abbreviazioni**:  
 $(\forall x.P \Rightarrow Q)$  viene scritta come  $(\forall x:P . Q)$   
e  
 $(\exists x.P \wedge Q)$  viene scritta come  $(\exists x:P . Q)$
- In queste formule, **P** è il *dominio* del quantificatore
- **Attenzione:** queste abbreviazioni vengono usate diffusamente nelle dispense, ma le eviteremo a lezione. Nei compiti d'esame potete usarle a vostro piacimento.
- Il dominio **P** è **vuoto** se  $P[v/x] \equiv \mathbf{F}$  per ogni elemento **v** del dominio di interpretazione (o se  $\sim(\exists x.P) \equiv \mathbf{T}$ )



## FORMULE VACUAMENTE VERE

- Una formula quantificata universalmente è *vacuamente vera* se il dominio è vuoto. Mostriamo infatti che se  $P$  è vuoto, allora  $(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \mathbf{T}$  indipendentemente da  $Q$ .

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{Ip}: P \text{ vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{F} \}$$

$$(\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T} \}$$

$$(\forall x.\mathbf{T})$$

- Due casi:

1) Se il dominio di interpretazione non è vuoto allora per (costante)  $(\forall x.\mathbf{T}) \equiv \mathbf{T}$ .

2) Se il dominio di interpretazione è vuoto, allora  $(\forall x.\mathbf{T}) \equiv \mathbf{T}$  per la definizione di semantica



# QUANTIFICAZIONE ESISTENZIALE SU DOMINIO VUOTO

- Dualmente, la formula  $(\exists x. P \wedge Q)$  è falsa se  $P$  è vuoto, indipendentemente da  $Q$ . Infatti:

$$(\exists x. P \wedge Q)$$

$$\Rightarrow \{ \text{legge } (\exists : \wedge) \}$$

$$(\exists x. P) \wedge (\exists x. Q)$$

$$\equiv \{ P \text{ è vuoto, cioè } P \equiv \mathbf{F} \}$$

$$(\exists x. \mathbf{F}) \wedge (\exists x. Q)$$

$$\equiv \{ (\text{costante}) \text{ se dominio non vuoto, semantica altrimenti} \}$$

$$\mathbf{F} \wedge (\exists x. Q)$$

$$\equiv \{ \text{zero} \}$$

$$\mathbf{F}$$



# ESTENSIONE DELLE LEGGI DEI QUANTIFICATORI ALLE FORMULE CON DOMINI

- Molte delle leggi per i quantificatori valgono anche quando si quantifica su di un dominio esplicito. Vediamone due (le altre sono sulla dispensa):

- $(\forall:\wedge)$

$$(\forall x.R \Rightarrow P \wedge Q) \equiv (\forall x.R \Rightarrow P) \wedge (\forall x.R \Rightarrow Q)$$

- De Morgan

$$\sim(\exists x.R \wedge P) \equiv (\forall x.R \Rightarrow \sim P)$$

- Esercizio: si dimostrino queste leggi sfruttando le analoghe leggi senza dominio



# NOTAZIONE PER GLI INTERVALLI

- Nelle dispense sono anche usate le seguenti abbreviazioni per un intervallo  $I$ , che noi eviteremo:
- $(\forall x \in I. Q) \cong (\forall x : x \in I. Q) \cong (\forall x. x \in I \Rightarrow Q)$
- $(\exists x \in I. Q(x)) \cong (\exists x : x \in I. Q) \cong (\exists x. x \in I \wedge Q)$



# LEGGI PER QUANTIFICAZIONE SU DOMINI

- Sia  $k$  un elemento del dominio di interpretazione. Queste leggi mostrano come ridurre la quantificazione sul dominio  $P$  ad un dominio più piccolo ( $P \wedge x \neq k$ ):

$$(\forall x.P \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} [(\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x]] & \text{se } P[k/x] \\ (\forall x.P \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$

$$(\exists x.P \wedge Q) \equiv \begin{cases} [(\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x]] & \text{se } P[k/x] \\ (\exists x.P \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } \sim P[k/x] \end{cases}$$



# Mostriamo la legge per $(\forall x.P \Rightarrow Q)$

$$(\forall x.P \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Terzo escluso, Unità} \}$$

$$(\forall x.P \wedge (x=k \vee x \neq k) \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Distributività} \}$$

$$(\forall x.(P \wedge x=k) \vee (P \wedge x \neq k) \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Dominio} \}$$

$$(\forall x. P \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Leibniz} \}$$

$$(\forall x. P[k/x] \wedge x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{Ip}: P[k/x], \text{Unità} \}$$

$$(\forall x.x=k \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \text{Singoletto} \}$$

$$Q[k/x] \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{Ip}: \sim P[k/x], \text{zero} \}$$

$$(\forall x.\mathbf{F} \Rightarrow Q) \wedge (\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

$$\equiv \{ \mathbf{F} \Rightarrow Q \equiv \mathbf{T}, \text{costante, unità} \}$$

$$(\forall x. P \wedge x \neq k \Rightarrow Q)$$

# LEGGI PER QUANTIFICAZIONE SU INTERVALLI (1)

- Queste leggi sono come le precedenti, quando il dominio è un intervallo:

$$(\forall x. x \in [a, b) \Rightarrow Q) \equiv \begin{cases} [(\forall x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) \wedge Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\forall x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \Rightarrow Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$

$$(\exists x. x \in [a, b) \wedge Q) \equiv \begin{cases} [(\exists x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \wedge Q) \vee Q[k/x] & \text{se } k \in [a, b) \\ (\exists x. x \in [a, b) \wedge x \neq k \wedge Q) & \text{se } k \notin [a, b) \end{cases}$$





# LEGGI PER QUANTIFICAZIONE SU INTERVALLI (2)

$$(\forall x.x \in [a,b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x.x \in [a,b) \Rightarrow P) \wedge P[b/x]$$

se  $[a,b]$  non è vuoto

$$(\forall x.x \in [a,b] \Rightarrow P) \equiv (\forall x.x \in (a,b] \Rightarrow P) \wedge P[a/x]$$

se  $[a,b]$  non è vuoto

$$(\exists x.x \in [a,b] \wedge P) \equiv (\exists x.x \in [a,b) \wedge P) \vee P[b/x]$$

se  $[a,b]$  non è vuoto

$$(\exists x.x \in [a,b] \wedge P) \equiv (\exists x.x \in (a,b] \wedge P) \vee P[a/x]$$

se  $[a,b]$  non è vuoto



# SPECIFICHE CON ARRAY/SEQUENZE

- Un array **a** di lunghezza **n** è rappresentato da una funzione dall'intervallo  $[0, n) = \{0, 1, \dots, n-1\}$  ad  $\mathbb{N}$
- Notazione: il valore *i*-esimo della funzione (array) **a** è indicato come **a[i]**
- Es: **a** = {<0,45>, <1,23>, <2,10>, <3,16>}

45	23	10	16
0	1	2	3

- NB: il primo elemento ha posizione/indice 0
  - $a[0] = 45, \dots, a[2]=10, \dots$



# ESERCIZI DI FORMALIZZAZIONE

Assumendo che **a** e **b** siano array di lunghezza **n**, fornire una formalizzazione dei seguenti enunciati, interpretata sul dominio dei naturali opportunamente arricchito.

- **a** è un array con tutti gli elementi uguali a 0

$$(\forall x. x \in [0, n) \Rightarrow a[x] = 0)$$

1. **a** rappresenta una funzione monotona crescente
2. **m** è il massimo dell'array **a**
3. **m** è l'indice del massimo dell'array **a**
4. l'array **a** ha un solo minimo locale
5. **a** ha tutti elementi distinti
6. **a** ha tutti elementi distinti e **b** è l'array **a** ordinato in senso crescente

