Linguaggi: Semantica

Programma in C

```
#include <stdio.h>;
# define bott_vol =2.0;
# define latt_vol = 0.355;
 int main ()
  {int bott_num = 4;
   int latt_num = 10;
   double totale = bott_vol * bott_num
              + latt_vol * latt_num;
   printf("volume totale %d litri", totale);
  }
```

Linguaggi: Semantica

Programma in Caml

```
let bott_vol =2.0 and latt_vol = 0.355
     and bott_num = 4 and latt_num = 10
 in bott_vol * bott_num + latt_vol * latt_num;
```

Cosa significa?
cosa calcola ?
a cosa serve ?
è corretto?

La correttezza sintattica è data dalla Grammatica di C

Programma::= Direttive
Prototipi
int main() Com
FunctDecList

Direttive ::= Direttiva Direttive | ε

Direttiva::= #define Ide; | #include <Ide.h>;|...

Prototipi::= Prototipo ; Prototipi | ε

Prototipo:= Type Ide(FormalList) ;

FunctDecList::= FunctDecl; FunctDecList | ε

FunctDec::= Type Ide (FormalList) Com

StmtList::=Stmt StmtList | ε

La correttezza sintattica è data dalla Grammatica di C

StmtList ::= Stmt ; StmtList | ε

Stmt::=Decl | Com

Com::=Ide=Exp *Assegnamento*

| if (Exp) Com else Com *Condizionale*

| while (Exp) Com *Iteratore*

| {StmtList} *Blocco*

| Ide(Exp) *Invocazione di fun*

| return Exp *Calcolo dei valore*

Exp::= Ide | Const | Exp Op Exp | Uop Exp | Ide

| Ide(Exp) | (Exp)...

Decl ::= Type Ide [=Exp]

Sintassi e semantica

- La sintassi di un linguaggio di programmazione è in genere descritta in modo molto rigoroso.
- La semantica viceversa spesso è descritta in modo non formale e quindi poco rigoroso. I vantaggi di una descrizione formale della semantica sono:
  - è la specifica del compilatore e dell'interprete:
    - permette di affrontare in modo rigoroso e strutturato il complesso problema dell'implementazione del linguaggio
    - uno stesso programma, eseguito da implementazioni diverse del linguaggio (macchine diverse), che però rispettano la semantica, danno lo stesso risultato.
  - aiuta nella definizione di programmi per la soluzione dei problemi,
  - permette di ragionare sulla correttezza dei programmi,

Semantica Operazionale: Sistemi di Transizioni

Sistema di transizioni: $S \equiv < \Gamma, T, \rightarrow >$

- Γ *configurazioni* (Stati)
- $T \subseteq \Gamma$ *finali*
- $\rightarrow \subseteq \Gamma \times \Gamma$ *relazione di transizione*

Derivazione D: $< S , \rightarrow^* >$

$\rightarrow^*$ $\equiv$ chiusura antisimmetrica, riflessiva, transitiva di $\rightarrow$

- $\gamma_i \rightarrow^* \gamma_k \Rightarrow \gamma_i \rightarrow \ldots \rightarrow \gamma_k \in D$

Regole (R) condizionali per →

$$\frac{\pi_1\ \pi_2 \dots \pi_n}{\gamma \rightarrow \gamma'}$$

Le π_i sono premesse e sono relazioni tra espressioni che contengono costanti, variabili e operatori del tipo (=, ≠,).

Le variabili sono quelle che permettono di *istanziare* la regola. Le indichiamo con $Vars(R)$.

La copertura delle variabili serve a garantire la fondatezza della regola.

Copertura delle variabili

Sia R la seguente regola condizionale

$$\frac{\pi_1\ \pi_2\ ..\ \pi_n}{\gamma \rightarrow \gamma'}$$

Sia $x \in Vars(R)$, x è coperta in R se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

1) x occorre γ;

2) esiste in R una premessa π_i del tipo $y=t$ tale che y è coperta in R e $x \in Vars(t)$

3) esiste in R una premessa π_i del tipo $x=t$ tale che tutte le variabili in $Vars(t)$ sono coperte.

4) esiste in R una premessa π_i del tipo $\delta \rightarrow' \delta'$ tale che tutte le variabili in δ sono coperte in R e $x \in Vars(\delta')$

Sostituzioni e istanziazioni

- Sia V= $\{x_1,...x_k\}$ è un insieme di variabili, si dice sostituzione l'insieme di associazioni $\vartheta = \{c_1/x_1,...\ c_k/x_k\}$ dove $c_1,...\ c_k$ sono costanti.
- Dato un termine o espressione E questo può essere istanziato su una sostituzione $(E)\vartheta$. L'istanza è l'espressione che si ottiene rimpiazzando in E tutte le variabili che occorrono in ϑ con i rispettivi valori.
  - es. V= $\{x,y\}$ e sia E = $x<y+1$ l'espressione se $\vartheta = \{4/x,2/y\}$ allora $(E)\vartheta = 4<2+1 = 4<3 =$ false
  - se invece $\vartheta = \{2/x, 3/y\}$ allora $(E)\vartheta = 2<3+1\ 2< 4 =$ true

Derivazione $\gamma \rightarrow \gamma'$

Sia < Γ, T, $\rightarrow$ > un sistema di transizioni con $(r_1)...(r_n)$ regole condizionali, abbiamo che $\gamma \rightarrow \gamma'$ se e solo se esiste una regola condizionale r_i per cui esiste una sostituzione ϑ per le variabili in r_i tale che:

- tutte le premesse di $(r_i)\vartheta$ sono soddisfatte;
- la conclusione di $(r_i)\vartheta$ è proprio $\gamma \rightarrow \gamma'$

Le variabili (spesso di seguito denotate con $\alpha,\beta,\delta,\gamma$) rappresentano generici elementi del dominio del discorso,

e si riconoscono perchè, nelle premesse, ne viene definito l'intervallo di variabilità.

Grammatiche LC come sistemi di transizioni

Data una G=<Λ,V,s,P>si può definire un sistema di transizioni nel seguente modo:

- le configurazioni sono sequenze di simboli in $\Lambda \cup V$
- le configurazioni terminali sono sequenze di simboli in Λ
- la relazione di transizione è definita in base alle produzioni, nel seguente modo: Per ogni produzione A::=$\eta \in$ P è definita una regola condizionale.

$$\boxed{\frac{\delta,\gamma \in (\Lambda \cup V)^*}{\delta A \gamma \rightarrow \delta \eta \gamma}}$$

precondizioni/
premesse/
prerequisiti

Un esempio

Data la grammatica G=<{a,b},{S},S,{S::=ab, S::=aSb}> definiamo un sistema di transizione nel modo seguente:

$\Gamma = \{\gamma \mid \gamma \in (\{a,b\} \cup \{S\})^*\}$

$T = \{\gamma \mid \gamma \in \{a,b\}^*\}$

$$\boxed{\frac{\delta, \mu \in (\{a,b\} \cup \{S\})\}}{\delta S \mu \rightarrow \delta ab \mu}}$$

$$\boxed{\frac{\delta, \mu \in (\{a,b\} \cup \{S\})\}}{\delta S \mu \rightarrow \delta aSb \mu}}$$

Rappresentazione e semantica

- I numeri (che indichiamo qui con ℵ sulla dispensa sono N) con le loro operazioni sono entità astratte che godono di importanti proprietà.
- Per utilizzarli e studiarli gli uomini hanno inventato delle rappresentazioni (concrete) di tali entità:
  - quella che conosciamo e usiamo normalmente sono i numeri arabi su base decimale,
  - i Romani ne usavano una diversa (I,II, III, IV, ...X, ..L...)
  - ne esistono molte altre, ad esempio su basi diverse (2,3,...ecc).
- Nel definire la semantica di un linguaggio di programmazione, dove le algebre dei numeri sono rappresentate da tipi predefiniti (int, long, real,..) e importante chiarire la differenza tra valore e rappresentazione.

Correttezza: Rappresentazione e Semantica dei numeri

Sia $\aleph$ l'insieme dei numeri naturali $\aleph=\{\underline{0},\underline{1},\underline{2},\underline{3},\ldots\}$ con le usuali operazioni di somma, sottrazione, ecc., e gli operatori di relazione (=, ≠,>,ecc).

Mentre Num sono sequenze di simboli che rappresentano i numeri naturali nella solita rappresentazione decimale.

funzione di valutazione η	funzione di rappresentazione ν
η: Num -> $\aleph$	ν: $\aleph$ -> Num
$\eta(0) = \underline{0} \in \aleph$	$\nu(\underline{0}) = 0 \in \text{Num}$
….	….
$\eta(9) = \underline{9} \in \aleph$	$\nu(\underline{9}) = 9 \in \text{Num}$
$\eta(nc) = \eta(n)\text{x}\underline{10} + \eta(c) \in \aleph$	$\nu(\underline{n}) = \nu(\underline{n} \div \underline{10})\nu(\underline{n} \bmod \underline{10}) \in \text{Num},\ \underline{n}>\underline{9}$

$$\langle n,n'\rangle \to_{+}^{*} m \quad \Rightarrow \quad \eta(n) + \eta(n') = \eta(m)$$

Rappresentazione binaria

- La rappresentazione che utilizza il minimo numero di simboli è la rappresentazione binaria (quella usata dai calcolatori).
- Tale rappresentazione è definita dalla seguente funzione di valutazione:

$$\eta(0) = \underline{0} \in \aleph$$

$$\eta(1) = \underline{1} \in \aleph$$

$$\eta(yb) = (\eta(y) \times \underline{2}) + \eta(b) \in \aleph$$

Si calcoli il valore di $\eta(1100)$ cioè il numero rappresentato dalla stringa binaria 1100.

Addizionatore di numeri

- Vediamo come esempio un addizionatore di numeri interi, che fa uso di due sistemi di transizione:
  - un addizionatore di cifre decimali
  - l'addizionatore di numeri
- la grammatica per definire i numeri da addizionare è la seguente:

```
110
456+
 57=
----
513
```

```
Num::= Num Cif | Cif
Cif::= 0|1|2|3|4|5|6|7|8|9
```

Addizione

<456,57>

→ <6,7,0> → <3,1>}

<45,5,3,1>

→ <5,5,1> → <1,1>}

<4,0,13,1>

→ <4,0,1> → <5,0>}

<0,0,513,0>

→ **513**

Addizionatore di cifre

Addizionatore di cifre: $S_{cr} \equiv < \Gamma_{cr}, T_{cr}, \rightarrow_{cr}>$

- $\Gamma_{cr} \equiv \{<c,c',r> \mid r \in \{0,1\},\ c,c' \in Cif\} \cup$

  $\{<c,r> \mid r \in \{0,1\},\ c \in Cif\}$
- $T_{cr} \equiv \{<c,r> \mid r \in \{0,1\},\ c \in Cif\}$
- $\rightarrow_{cr}$

$<0,0,0> \rightarrow_{cr} <0,0>$	$<0,0,1> \rightarrow_{cr} <1,0>$
$<0,1,0> \rightarrow_{cr} <1,0>$	$<0,1,1> \rightarrow_{cr} <2,0>$
$<0,2,0> \rightarrow_{cr} <2,0>$	$<0,2,1> \rightarrow_{cr} <3,0>$
….	…..
$<9,8,0> \rightarrow_{cr} <7,1>$	$<9,8,1> \rightarrow_{cr} <8,1>$
$<9,9,0> \rightarrow_{cr} <8,1>$	$<9,9,1> \rightarrow_{cr} <9,1>$

Addizionatore di numeri

Addizionatore di Num: $S_+ \equiv < \Gamma_+, T_+, \rightarrow_+ >$

- $\Gamma_+ \equiv \{<n,n'> \mid n,n' \in Num\} \cup$

  $\{<n,n',m,r> \mid r \in \{0,1\},\ n,n',m \in Num\} \cup$

  $\{n \mid n \in Num\}$
- $T_+ \equiv \{n \mid n \in Num\}$
- $\rightarrow_+$

$$\frac{<c,c',0> \rightarrow_{cr} <c'',r>}{<c,c'> \rightarrow_+ <0,0,c'',r>} \quad \text{(i)}$$

$$\frac{<c,c',0> \rightarrow_{cr} <c'',r>}{<nc,c'> \rightarrow_+ <n,0,c'',r>} \quad \text{(ii)}$$

$$\frac{<c,c',0> \rightarrow_{cr} <c''r>}{<c,nc'> \rightarrow_+ <0,n,c'',r>} \quad \text{(iii)}$$

Transizioni $\rightarrow_{+}$(continua)

$$\frac{\langle c,c',0\rangle \rightarrow_{cr} \langle c'',r\rangle}{\langle nc,n'c'\rangle \rightarrow_{+} \langle n,n',c'',r\rangle} \qquad \text{(iv)}$$

$$\langle 0,0,m,0\rangle \rightarrow_{+} m \qquad \text{(v)}$$

$$\frac{\langle c,c',r\rangle \rightarrow_{cr} \langle c'',r'\rangle}{\langle c,c',m,r\rangle \rightarrow_{+} \langle 0,0,c''m,r'\rangle} \quad \text{se } \langle c,c',r\rangle \neq \langle 0,0,0\rangle \qquad \text{(vi)}$$

$$\frac{\langle c,c',r\rangle \rightarrow_{cr} \langle c'',r'\rangle}{\langle nc,c',m,r\rangle \rightarrow_{+} \langle n,0,c''m,r'\rangle} \qquad \text{(vii)}$$

$$\frac{\langle c,c',r\rangle \rightarrow_{cr} \langle c'',r'\rangle}{\langle c,nc',m,r\rangle \rightarrow_{+} \langle 0,n,c''m,r'\rangle} \qquad \text{(viii)}$$

$$\frac{\langle c,c',r\rangle \rightarrow_{cr} \langle c'',r'\rangle}{\langle nc,n'c',m,r\rangle \rightarrow_{+} \langle n,n',c''m,r'\rangle} \qquad \text{(ix)}$$

Applicazione dell'addizionatore

<92,512>

$\rightarrow_{+}\{(iV), <2,2,0> \rightarrow_{cr} <4,0>\}$

<9,51,4,0>

$\rightarrow_{+}\{(iX), <9,1,0> \rightarrow_{cr} <0,1>\}$

<0,5,04,1>

$\rightarrow_{+}\{(vi), <0,5,1> \rightarrow_{cr} <6,0>\}$

<0,0,604,0>

$\rightarrow_{+}\{(v)\}$

604

Macchina S_+

277 + 9902

<277,9902> → <27,990,9,0> → <2,99,79,0> →
<0,9,179,1> →<0,0,0179,1> → <0,0,10179,0> → 10179

10179

Continua 3

Un esempio: la reverse di una sequenza di caratteri

$Rev \equiv < \Gamma_{Rev}, T_{Rev}, \rightarrow_{Rev} >$

- $\Gamma_{Rev} \equiv \{<\alpha,\beta> \mid \alpha, \beta \in \Lambda^*\}$
- $T_{Rev} \equiv \{<\varepsilon, \beta > \mid \beta \in \Lambda^*\}$
- $\rightarrow_{Rev} \equiv \{$

$$\frac{x \in \Lambda, \qquad \alpha, \beta \in \Lambda^*}{<x\alpha,\beta> \rightarrow <\alpha, x\beta>}$$

Soluzione con solo coppie di sequenze.
La configurazione iniziale è $<\alpha,\varepsilon>$

Un'altra soluzione: la reverse

$Rev \equiv < \Gamma_{Rev}, T_{Rev}, \rightarrow_{Rev}>$

- $\Gamma_{Rev} \equiv \{<\alpha,\beta> \mid \alpha, \beta \in \Lambda^*\} \cup \{\alpha \mid \alpha \in \Lambda^*\}$
- $T_{Rev} \equiv \{\alpha \mid \alpha \in \Lambda^*\}$
- $\rightarrow_{Rev} \equiv \{<x \in \Lambda, \quad \alpha, \beta \in \Lambda^*$

$$\frac{}{<x\alpha,\beta> \rightarrow <\alpha, x\beta>}$$

$$\alpha \rightarrow <\alpha, \varepsilon> \qquad\qquad <\varepsilon, \beta> \rightarrow \beta$$

Soluzione con coppie di sequenze, che termina con una singola sequenza

Esempio eliminazione di ripetuti

$\text{Rem} \equiv < \Gamma_{\text{Rem}}, T_{\text{Rem}}, \rightarrow_{\text{Rem}} >$

- $\Gamma_{\text{Rem}} \equiv \{<\alpha,x> \mid \alpha \in \Lambda^*,\ x \in \{\text{START},\text{STOP}\}\}$
- $T_{\text{Rem}} \equiv \{<\alpha,\text{STOP}> \mid \alpha \in \Lambda^*\}$,
- $\rightarrow_{\text{Rem}} \equiv \{ \quad <\varepsilon,\text{START}> \rightarrow <\varepsilon,\text{STOP}> \qquad (1)$

$$\frac{x \in \Lambda}{<x,\text{START}> \rightarrow <x,\text{STOP}>} \ (2)$$

$$\frac{x \in \Lambda,\ \alpha,\ \beta \in \Lambda^*,\ <x\alpha,\text{START}> \rightarrow^*_{\text{Rem}} <\beta,\text{STOP}>}{<xx\alpha,\text{START}> \rightarrow <\beta,\text{STOP}>} \ (3)$$

$$\frac{x,y \in \Lambda,\ x \neq y,\ \alpha,\beta \in \Lambda^*,\ <y\alpha,\text{START}> \rightarrow^*_{\text{Rem}} <\beta,\text{STOP}>}{<xy\alpha,\text{START}> \rightarrow <x\beta,\text{STOP}>} \ (4)$$

$\}$

Eliminazione dei ripetuti: Esempio di applicazione

$\langle aacbbb,\text{START}\rangle \rightarrow_{(3)\vartheta_0} \langle \beta_0,\text{STOP}\rangle \equiv \langle acb,\text{STOP}\rangle \quad \vartheta_0=\{a/x_0, cbbb/\alpha_0, {}^{acb}/\beta_0\}$

$\langle acbbb,\text{START}\rangle \rightarrow^{*} \langle \beta_0,\text{STOP}\rangle \equiv \langle acb,\text{STOP}\rangle \quad \beta_0 = acb$

$\langle acbbb,\text{START}\rangle \rightarrow_{(4)\vartheta_1} \langle a\beta_1,\text{STOP}\rangle \equiv \langle acb,\text{STOP}\rangle \quad \vartheta_1=\{a/x_1, c/y_1, bbb/\alpha_1, {}^{cb}/\beta_1\}$

$\langle cbbb,\text{START}\rangle \rightarrow^{*} \langle \beta_1,\text{STOP}\rangle \equiv \langle cb,\text{STOP}\rangle \quad \beta_1 = cb$

$\langle cbbb,\text{START}\rangle \rightarrow_{(4)\vartheta_2} \langle c\beta_2,\text{STOP}\rangle \equiv \langle cb,\text{STOP}\rangle \quad \vartheta_2 = \{c/x_2, b/y_2, bb/\alpha_2, {}^{b}/\beta_2\}$

$\langle bbb,\text{START}\rangle \rightarrow^{*} \langle \beta_2,\text{STOP}\rangle \equiv \langle b,\text{STOP}\rangle \quad \beta_2 = b$

$\langle bbb,\text{START}\rangle \rightarrow_{(3)\vartheta_3} \langle \beta_3,\text{STOP}\rangle \equiv \langle b,\text{STOP}\rangle \quad \vartheta_3 = \{b/x_3, b/\alpha_3, {}^{b}/\beta_3\}$

$\langle bb,\text{START}\rangle \rightarrow^{*} \langle \beta_3,\text{STOP}\rangle \equiv \langle b,\text{STOP}\rangle \quad \beta_3 = b$

$\langle bb,\text{START}\rangle \rightarrow_{(3)\vartheta_4} \langle \beta_4,\text{STOP}\rangle \equiv \langle b,\text{STOP}\rangle \quad \vartheta_4 = \{b/x_4, \varepsilon/\alpha_4, {}^{b}/\beta_4\}$

$\langle b,\text{START}\rangle \rightarrow^{*} \langle \beta_4,\text{STOP}\rangle \equiv \langle b,\text{STOP}\rangle \quad \beta_4 = b$

$\langle b,\text{START}\rangle \rightarrow_{(2)\vartheta_5} \langle b,\text{STOP}\rangle \quad \vartheta_5 = \{b/x_5\}$