Da:

F. Luccio, L. Pagli

"Algoritmi, Divinità e gente comune". Ed. ETS

1999

2.

L'intrattabilità

LE BRIGATE MULTICOLORI

Ove si scopre che senza una strategia la risoluzione di un problema può richiedere un tempo incredibilmente elevato, con alcune digressioni sulla teoria della complessità e un'ipotesi sul progresso dell'uomo.

L'uomo, si sa, trasforma la natura circostante, e per questo ha ideato innumerevoli procedimenti che operano su tutto quanto abbia avuto la ventura di capitargli tra le mani: dall'impiego delle armi per cacciare animali alla liquefazione di minerali per fabbricare oggetti metallici. Con il progredire delle conoscenze ha definito i procedimenti in modo astratto (strategia di caccia, tecnica di fusione), separandoli dagli oggetti su cui essi operano (bufalo o gazzella, pirite o bauxite). Ha agito per accumulazione di conoscenze, applicando a ogni procedimento risultati ottenuti in precedenza: per impiegare una freccia è necessario saperla costruire; per aggiungere carbone nel forno bisogna saperlo estrarre dalle miniere. Nella sfera della matematica la necessità di definire un procedimento in modo preciso fu chiara sin dagli inizi: nel 1650 a.C. lo scriba Ahmes indicò agli egiziani come eseguire la moltiplicazione tra due numeri arbitrari mediante una sequenza di duplicazioni e dimezzamenti di questi; qualunque problema successivo in cui fosse necessaria la moltipicazione faceva riferimento al metodo ormai noto, senza doverlo nuovamente descrivere[1].

[1] Il papiro di Ahmes, così detto dal nome del suo compilatore, si trova quasi al completo nel British Museum di Londra. Il suo contenuto dovreb-

Tutto questo ha assunto un carattere autoritariamente definitivo nell'era dei calcolatori. Il procedimento è un *algoritmo* che in genere viene espresso in un linguaggio formale intellegibile da un calcolatore per cui è stato formulato; algoritmi già noti e sperimentati sono impiegati per costruirne altri, con grande semplificazione dell'intero procedimento. Ci occuperemo ora di valutare la *complessità* di un algoritmo, cioè il numero di azioni elementari che esso esegue, che dà a sua volta una misura del tempo richiesto[2]. Scopriremo così che vi sono problemi ben formulati e apparentemente semplici che richiedono un numero di azioni, quindi un tempo di soluzione, inverosimilmente elevato. E per farlo ricorreremo a due storie parallele che ci accompagneranno fino in fondo al capitolo.

Prima storia. Il saggio Uk aveva chiamato a raccolta i membri della comunità sul Masso Rotondo che si protende sopra le acque impetuose del Serchio. L'estinzione dei dinosauri aveva causato una grave penuria di generi alimentari, con aumenti indiscriminati dei prezzi dei salumi che stavano mettendo in serie difficoltà i ceti meno abbienti; si tirava avanti grazie a qualche pesce che aveva la sbadataggine si saltare fuori dai vortici del fiume e veniva raccolto sulle rocce e essiccato; gli ominidi, valenti cacciatori di sauri, avevano infatti pochissima dimestichezza con l'acqua e se tenevano alla larga. Uk pose il problema di catturare i pesci direttamente dal fiume utilizzando ogni possibie mezzo a disposizione: sassi, rami

be essere una ripetizione di archivio di concetti e risultati molto più antichi.

[2] Un'introduzione abbastanza semplice alla teoria degli algoritmi si può trovare in F. LUCCIO, *La struttura degli algoritmi*, Boringhieri, Torino 1982.

d'albero, capelli, starnuti, la luce della luna, il rumore del vento. Che tutti si dessero da fare.

Nella loro assoluta ignoranza sui costumi e la psicologia dei pesci, gli ominidi non riuscirono a escogitare alcuna strategia di cattura. Iniziarono quindi con pazienza a combinare in tutti i modi gli oggetti disponibili: urlavano alla luna e lanciavano sassi nel fiume; bruciavano unghie e capelli e sotterravano le ceneri vicino alla riva; tutto senza successo. Solo un milione di anni più tardi la combinazione giusta emerse tra le innumerevoli combinazioni possibili: legando una liana all'estremità di un ramo, attaccando una conchiglia appuntita alla liana, infilzando un bruco nella conchiglia, calando il bruco nell'acqua, i pesci abboccavano e venivano catturati ritirando repentinamente il ramo. Era nato l'algoritmo di pesca.

Seconda storia. La sovversiva Heidi aveva appena terminato di tracciare sul muro il simbolo della sua brigata (una stella a quattro punte: figura 1) quando sentì lo squillo di una sirena che si avvicinava. Con grande prontezza ricoprì il muro di segni a caso per mascherare il simbolo (figura 2: il lettore potrà riconoscere la stella al centro del disegno) e quando gli agenti le balzarono addosso si dichiarò prigioniera politica e chiarì subito che non avrebbe detto altro.

Era un brutto problema per le forze dell'ordine. Le brigate sovversive si erano moltiplicate a dismisura e per confondere le istituzioni avevano adottato nomi appena differenziati: tutte le sfumature dell'iride, dal rosso al violetto. Anche i simboli erano simili tra loro: insiemi di k punti posti sui vertici di un poligono e collegati a due a due in tutti i modi possibili, detti stelle a k punte, ove ogni valore di k indicava una brigata diversa. Tanto più rigida nell'ortodossia era la brigata, tanto più alto era il valore di k. Individuare a quale brigata apparteneva Heidi avrebbe permesso di stabilirne immediatamente il grado di pericolosità, e sarebbe stato di grande aiuto nelle indagini. Ma purtroppo il simbolo era stato mascherato dagli altri tratti di pittura.

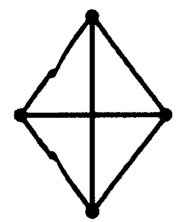

Fig. 1 - Il disegno di Heidi.

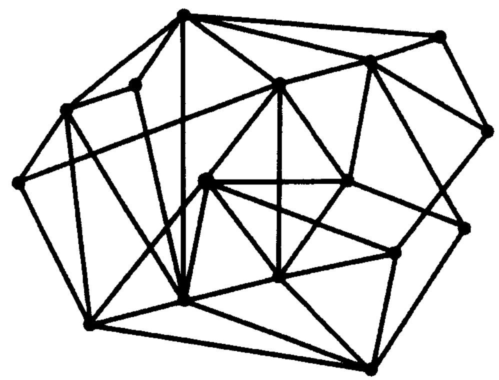

Fig. 2 - Il disegno mascherato.

La polizia però sapeva che il codice di comportamento delle Brigate Multicolori impediva ai membri di impiegare il simbolo di una brigata di ordine superiore, fosse anche per nascondere il proprio. Un membro della brigata 4, per esempio, non avrebbe mai tracciato una stella a cinque punte, cioè un pentagono con tutti i segmenti che ne congiungono i vertici, neanche come parte di un disegno mascherato. Ora è necessario osservare che una stella a cinque punte contiene al suo interno numerose stelle a quattro punte: più esattamente qualsiasi gruppo di quattro vertici della stella a cinque punte ha in tale stella tutti i segmenti che uniscono quei vertici, e quindi costituisce una stella a quattro punte (figura 3: una delle stelle a quattro punte è segnata con tratti spessi). A loro volta

le stelle a quattro punte contengono stelle a tre punte, cioè triangoli, e così via: in sostanza una stella a k punte contiene numerosissime stelle di tutti gli ordini inferiori, mentre ovviamente non è vero il contrario. Per questo motivo il brigadiere che comandava la pattuglia lasciò sul posto l'agente Vòrtice con il compito di scoprire la stella di ordine massimo che si celava nel disegno: per lo meno, disse, guarda se c'è una stella a quattro punte perché l'indagata mi sembra almeno di ordine quattro.

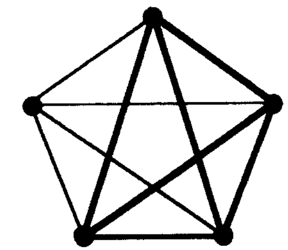

Fig. 3 - Una stella a quattro punte contenuta nella stella a cinque punte.

Dopo alcuni tentativi senza successo il Vòrtice decise di eseguire la ricerca della stella in modo organizzato, ma non riuscì a escogitare niente di meglio che provare tutti i gruppi di quattro vertici, tra i sedici vertici presenti nel disegno, e verificare in ciascun gruppo se esistevano tutti i segmenti possibili. Tuttavia anche una ricerca sistematica di tali gruppi non era cosa semplicissima, per cui l'agente prese a annotare su un taccuino tutte le quaterne di vertici con il proposito di verificare poi se alcuna corrispondesse a una stella. A tale scopo aveva numerato i vertici del disegno da uno a sedici per rappresentarne i gruppi di quattro con quaterne di numeri, e elencava queste ultime con l'unica regola che gli era venuta in mente: iniziò con quelle che avevano le prime tre cifre fisse e l'ultima variabile, per poi incrementare di uno la terzultima cifra e far variare di nuovo l'ultima in tutti i modi possibili. Aveva così ottenuto le quaterne (1, 2, 3, 4), (1, 2, 3, 5), …, (1, 2, 3, 16), (1, 2, 4, 5), (1, 2, 4, 6), …, (1, 2, 4, 16), …, (1, 2, 15, 16): ben novantuno quaterne!

e ora doveva considerare quelle in cui si incrementava anche la seconda cifra, cioè ricominciare con (1, 3, 4, 5), (1, 3, 4, 6), ...; e infine incrementare anche la prima cifra, cioè (2, 3, 4, 5), (2, 3, 4, 6), ... Con volontà ferrea, ma con la frustrazione di chi si sente in difficoltà davanti a un problema presumibilmente banale, proseguì elencando le quaterne e verificando se corrispondessero a una stella a quattro punte. Quando dodici ore più tardi il brigadiere tornò a rilevarlo, il Vòrtice, con occhi solcati da cerchi concentrici e movenze da automa, stava esaminando la milletrentasettesima quaterna senza aver ancora individuato la stella. Risparmiamo al lettore le frasi ingiuriose del brigadiere, che l'agente incassò con rassegnazione: nessuno dei due sapeva che il Vòrtice aveva fatto quanto di meglio oggi si sappia davanti a tale problema, e cioè esaminare una a una le milleottocentoventi quaterne possibili.

Per comprendere appieno il significato delle due storie dobbiamo considerare la costruzione di algoritmi da un punto di vista più generale. In mancanza di una strategia gli ominidi avevano combinato gli oggetti a loro disposizione in gruppi per sperimentarne l'efficacia a fini di pesca. Indicando genericamente con n il numero degli oggetti l'algoritmo richiedeva di costruire 2^n gruppi perché tanti sono i sottoinsiemi di un insieme di n elementi. Studi recenti ci consentono oggi di affermare che gli oggetti erano trentadue e i gruppi $2^{32} = 4.294.967.296$: sperimentandone una decina al giorno gli ominidi ottennero il risultato in un milione di anni. Era andata assai meglio all'agente Vòrtice.

Per individuare una stella a quattro punte in un disegno arbitrario, l'agente aveva rappresentato i dati con

numeri interi e aveva definito preventivamente un algoritmo per generare quaterne, per impiegarlo poi come blocco costruttivo nell'algoritmo generale. Ma si era trovato a eseguire un numero inaspettatamente alto di operazioni, perché in un insieme di n elementi vi sono $n \times (n\text{-}1) \times (n\text{-}2) \times (n\text{-}3) \,/\, (4 \times 3 \times 2 \times 1)$ quaterne distinte. Questa funzione è un *polinomio di quarto grado* e cresce molto rapidamente al crescere della variabile n: in un insieme di $n = 4$ elementi vi è ovviamente solo una quaterna; per $n = 8$ le quaterne sono 70; per $n = 16$, come nell'insieme esaminato dal Vòrtice, le quaterne sono 1820. E se Heidi avesse avuto il tempo di ingrandire il disegno fino a includervi 32 vertici, le quaterne sarebbero divenute 35.960: esaminandone una al minuto l'agente avrebbe impiegato venticinque giorni per considerarle tutte. Naturalmente la crescita della funzione, ancorché rapida, non è confrontabile con la crescita esponenziale sperimentata dagli ominidi: per $n = 32$ l'esame di 35.960 casi non costituisce alcun problema per un calcolatore, mentre una funzione come 2^n genererebbe più di quattro miliardi di casi: con il progressivo aumentare di n un algoritmo con un simile tasso di crescita sfuggirebbe rapidamente anche al dominio delle macchine.

In sostanza, pur affrontando il problema con ingenuità, il Vòrtice aveva operato in modo molto sensato perché la complessità del suo procedimento cresce in modo polinomiale con la dimensione del disegno. Per la teoria degli algoritmi un tale procedimento è contenuto nei limiti del ragionevole; uscirebbe da questi limiti se la complessità fosse esponenziale. I problemi risolubili con algoritmi di complessità polinomiale si dicono infatti *trattabili*, pur lasciando aperto lo studio dell'efficienza all'interno di questa classe, cioè la ricerca di algoritmi la cui complessità sia espressa da un polinomio di basso grado. Per contro i problemi per cui esistono solo algoritmi di complessità esponenziale si dicono *intrattabili*, per indicare che divengono sostanzialmente irrisolubili al crescere della dimensione dei dati pur impiegando un calcolatore di potenza arbitraria. Questa divisione è fondamentale ma non chiude l'argomento, perché per molti problemi importanti non si conoscono algoritmi polinomiali ma non esiste dimostrazione conclusiva che non possano esistere. In teoria non sappiamo se questi problemi sono realmente intrattabili, o se devono essere considerati tali fino alla scoperta di un algoritmo efficiente per risolverli. Esaminiamo la situazione più da vicino.

Per molto tempo, e nei più diversi campi, l'uomo si è imbattuto in problemi che si mostrano inattaccabili con qualunque strategia intellegente, e vengono quindi affrontati attraverso l'esame di tutti i casi possibili. Per un insieme di n dati il problema si risolve per esempio esaminando tutti i sottogruppi di essi, alla ricerca di uno con particolari caratteristiche (l'algoritmo degli ominidi); o elencando tutti gli ordinamenti secondo cui i dati possono essere disposti; o con altri meccanismi esaurienti. Abbiamo visto che nel primo caso si devono studiare 2^n alternative; nel secondo se ne dovevano studiare $n \times (n\text{-}1) \times (n\text{-}2) \times \ldots \times 2 \times 1$, perché tanti sono gli ordinamenti diversi di n elementi: numero sicuramente maggiore di 2^n (e in verità molto maggiore se n è grande), perché ottenuto come prodotto di n termini quasi tutti maggiori di due. Tutti gli algoritmi basati su questi metodi hanno quindi complessità esponenziale. Una serie di studi basati su concetti matematici molto sottili, che hanno avuto il battesimo ufficiale nel 1971 con un famoso teorema di Stephen Cook, ha permesso di scoprire un legame inaspettato tra tutti questi problemi: se si potesse risolvere anche uno solo di essi in tempo polinomiale, tutti sarebbero risolubili in pari tempo. In sostanza i problemi di questa classe, detti NP-completi[3], hanno in comune una struttura logica di base che è l'unica responsabile della loro difficoltà. Vediamone un esempio che ci riguarda da vicino.

La ricerca di una stella a quattro punte è un problema trattabile perchè, come abbiamo visto, può essere affrontato con un algoritmo di complessità polinomiale. Poiché però il polinomio è di quarto grado sarebbe interessante studiare un algoritmo più efficiente: è una curiosità scientifica, non una posizione politica avversa alle Brigate Multicolori. Vediamo però prima quel che accade per stelle diverse. Per controllare l'esistenza di una stella a k punte esaminando tutti i gruppi di k vertici tra gli n vertici di un disegno, si devono generare $n \times (n\text{-}1) \times \ldots . \times (n\text{-}k\text{+}1) / (k \times (k\text{-}1) \times \ldots . \times 1)$ casi distinti: questa funzione è un polinomio di grado k nella variabile n, e cresce rapidamente al crescere di k e n: per cercare stelle a cinque punte nella figura 2 (cioè per $k = 5$, $n = 16$) si dovrebbero considerare 4368 casi. Se facciamo crescere il numero delle punte della stella fino a $k = n / 2$, la funzione si complica perché la n appare anche al denominatore: non è però difficile rendersi conto che il suo valore diviene maggiore di $2^{n/2}$, cioè la legge è esponenziale (a questo fine poco importa che l'esponente di 2 sia n o $n/2$)[4]. Se

[3] Sarebbe fuor di luogo esporre qui le complesse ragioni che hanno motivato questo nome. Ricordiamo solo che NP sono le iniziali di Nondeterministico Polinomiale, a indicare che tali problemi si risolvono in tempo polinomiale solo utilizzando uno schema di calcolo nondeterministico che esiste solo come astrazione ideale.

[4] Per $k = n/2$ la funzione diviene un rapporto tra due prodotti di $n/2$

dunque il Vòrtice avesse applicato il suo algoritmo alla ricerca di stelle arbitrarie sarebbe potuto incorrere in tempi esponenzialmente grandi. Ma non possiamo biasimarlo: questo problema appartiene alla famiglia degli NP-completi, e nessuno sa come risolverlo in modo più efficiente. Per la ricerca di una stella a qualsivoglia numero di punte non sembra esistere strategia migliore della banale enumerazione di tutti i casi.

Riteniamo fuori luogo approfondire la discussione sui problemi NP-completi; ci limiteremo a citarne un altro per mostrare come nella costruzione di algoritmi possano sorgere difficoltà inaspettate anche in situazioni apparentemente innocue. Poniamo di voler utilizzare nel modo migliore un quaderno copiandovi pensieri di Maradona tratti da un'ampia raccolta di interviste televisive: vi sarà in genere dello spazio perduto nell'ultima pagina perché non è accettabile che il pensiero finale venga mutilato; noi vogliamo cercare, se esiste, un gruppo di pensieri che empia esattamente il quaderno. Anche questo problema è NP-completo, cioè:

non si conosce strategia più efficiente che quella di calcolare una a una le lunghezze di tutti i possibili 2^n gruppi di pensieri tra gli n della raccolta, per individuare, se esiste, un gruppo della stessa lunghezza del quaderno; questo algoritmo di soluzione è quindi esponenziale;

si può dimostrare che se si trovasse un algoritmo per risolvere questo problema in tempo polinomiale, una semplice trasformazione dell'algoritmo ci consentirebbe di risolvere in pari tempo anche il problema delle stelle a k punte, nonché qualunque altro problema NP-completo;

termini ciascuno. Il valore $2^{n/2}$ si ottiene dividendo ordinatamente i termini del numeratore per quelli del denominatore; la funzione si riduce così al prodotto di $n/2$ termini tutti ≥ 2.

si ritiene che un algoritmo così potente non esista, benché il fatto non sia mai stato dimostrato. I problemi NP-completi sono quindi dati tutti per intrattabili.

Per la pesca non possiamo dimostrare matematicamente alcunché di simile, ed è probabile che studiando la psicologia dei pesci la soluzione si sarebbe potuta escogitare prima. Il problema ha però una proprietà in comune con tutti i problemi NP-completi: sebbene *raggiungere* la soluzione sia difficile (esponenzialmente difficile), *verificare* che una data scelta corrisponda alla soluzione è facile (polinomialmente facile). Per esempio verificare che un dato gruppo di $n/2$ vertici di un disegno sia una stella a $n/2$ punte richiede unicamente il controllo che esistano tutti i segmenti congiungenti tali vertici, cioè sono necessarie $(n/2) \times (n/2\text{-}1) / 2$ operazioni perché tanti sono i segmenti della stella: la complessità dell'algoritmo di verifica è cioè espressa da un polinomio di secondo grado. Similmente verificare che un dato gruppo di pensieri di Maradona scelti tra n riempia esattamente un quaderno richiede unicamente di confrontare la somma delle lunghezze dei pensieri del gruppo con la lunghezza del quaderno, operazione di complessità al più lineare in n perché il gruppo può contenere al massimo tutti i pensieri della raccolta. Anche il problema della pesca ammette una verifica di complessità lineare se si ammette che connettere gli oggetti che costituiscono la soluzione (ramo, liana, conchiglia, bruco) richieda tempo proporzionale al numero di questi, e che il tempo per controllare il funzionamento del marchingegno (tempo di pesca del primo pesce) sia fissato.

Nel corso della sua storia l'uomo ha costantemente inseguito risultati difficili da raggiungere ma facili da riprodurre una volta noti, e ha posto il loro buon uso alla base del progresso. Nella civiltà occidentale Giordano Bruno fu forse il primo a osservare come lo sviluppo delle conoscenze sia strettamente legato all'esperienza accumulata, rendendo la generazione vivente più sapiente di tutte le precedenti: affermazione che oggi può sembrarci banale, ma non lo era affatto ai tempi in cui fu espressa. Nel mondo classico il concetto positivo di sviuppo era in conflitto con l'idea di un'età dell'oro da cui l'uomo si era gradatamente staccato in una decadenza irreversibile; idea perpetuata nel Medioevo cristiano con la condanna della corruzione delle anime, e sempre presente nella nostalgia popolare:

> Tiempe belle 'e 'na vota,
> tiempe belle addò state?
> Vuie ci'avite lassate e pecché nun turnate?

cantavano Califano e Valente a Piedigrotta, nel 1916.

Il ruolo del potere creativo dell'uomo nel suo sviluppo storico iniziò a farsi luce nel Rinascimento, ma fu l'illuminismo francese ad asserire il valore universale del progresso, in una fusione di valori etici, sociologici e scientifici[5]. La tesi latente nel pensiero di tutti gli illuministi fu promossa con entusiasmo dal Condorcet nella seconda metà del Settecento, e fu accolta a pieno titolo nel positivismo del secolo successivo che elevò il progresso a livello di valore universale: anche se Comte, suo grande assertore, doveva trascinarla in farneticazioni liturgiche. Ma dobbiamo spiegare perché ci occupiamo di tutto questo.

[5] L. GEYMONAT, *Storia del pensiero filosofico*, Garzanti, Milano 1974. Siamo però fortemente debitori a Rita Testa che per prima ci ha spiegato come il concetto di progresso si sia fatto strada nello sviluppo della filosofia europea.

Estendendo in senso algoritmico il pensiero di Giordano Bruno immaginiamo che i risultati che l'umanità è capace di ottenere in un certo istante del suo sviluppo siano proporzionali a tutti i risultati ottenuti precedentemente. Con la cautela dovuta in queste circostanze, proviamo a scrivere la semplice equazione:

$$R_t = c\,R_{t-1}$$

ove R_t è una misura della quantità di risultati utili ottenuti al tempo t (giorno, o anno, o secolo, poco importa), espressa attraverso la stessa quantità R_{t-1} valutata al tempo precedente, moltiplicata per una costante c di proporzionalità. Partendo da un istante ideale di inizio della civilizzazione che poniamo convenzionalmente al tempo $t = 0$, e assegnando all'uomo un patrimonio minimo di conoscenze iniziali R_0 derivante dall'osservazione di quanto lo circondava, possiamo esprimere la misura delle conoscenze al tempo arbitrario n iterando la legge di crescita:

$$R_n = c\,R_{n-1} = c^2 R_{n-2} = c^3 R_{n-3} = \ldots = c^n R_0 \,.$$

R_n è dunque una funzione esponenziale del tempo, che ha come base la costante c di proporzionalità. Il valore di c è presumibilmente molto piccolo, diciamo appena maggiore di uno; ma le considerazioni del capitolo precedente dovrebbero farci comprendere il fenomeno a cui l'uomo è andato incontro nel corso del tempo. La crescita, inizialmente lentissima, è divenuta poi sempre più rapida. Nel bacino del Mediterraneo il Paleolitico è durato forse 500.000 anni; il Neolitico 15.000; l'Età del bronzo 3.000; l'età del ferro 1.000. I passi avanti erano così modesti da non poter essere osservati anche nel corso di molte generazioni: l'uomo, ignaro della propria storia, si vedeva attore in un ambiente immutabile. Nel mondo classico il progresso prese un avvio più spedito, ma le fluttuazioni dovute ai cicli storici che si succedevano nel tempo mascheravano l'andamento fondamentale di crescita; finché questo andamento emerse nelle scienze in modo così prepotente da non poter essere ignorato, e divenne fulcro di una filosofia che intendeva coniugarlo con lo sviluppo etico e sociale. Era il Mille e settecento: in che misura questa utopia si sia avverata non sta a noi giudicare.