Ricorsione (introduzione alla programmazione funzionale)

Prog. funzionale è basata sul paradigma ricorsivo

Teoria della ricorsione (ovvero la soluzione di definizioni ricorsive)

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad f(x) = 2 \cdot x - 4$

Una equazione ricorsiva basata su f

$x = f(x)$ | $x = 2 \cdot x - 4$ le soluzioni di questa equazione si dicono:

PUNTI FISSI DI f

Titolo nota 24/09/2015

$x = f(x)$ $x = 2 \cdot x - 4$

4 è un punto fisso $4 = 2 \cdot 4 - 4$

3 non è un punto fisso $3 \neq 2 \cdot 3 - 4$

Una definizione ricorsiva definisce i suoi punti fissi (le sue soluzioni)

Daremo definizioni ricorsive di INSIEMI e vedremo la teoria della ricorsione su queste definizioni.

Titolo nota 24/09/2015

A insieme qualsiasi

$\mathbb{P}_A$ (parti di A) indica l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

$A = \{\emptyset, 1, 2\}$ $\quad \mathbb{P}_A = \{ \{\}, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{\emptyset, 1\}, \{\emptyset, 2\}, \{1, 2\}, \{\emptyset, 1, 2\} \}$

Se A è finito, $\mathbb{P}_A$ è finito

Titolo nota 24/09/2015

$\mathbb{N}$ $\mathbb{P}_{\mathbb{N}} = \{ \{\}, \{0\}, \{1\}, \ldots$
$\{0,1\}, \{0,2\}, \ldots$
$\vdots$
$\}$

Se A è infinito, $\mathbb{P}_A$ è infinito

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

dove A è un qualsiasi insieme
T è una funzione (trasformazione)
da sottoinsiemi di A in sottoinsiemi di A

Titolo nota 24/09/2015

$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$T(x) = x \cup \{\emptyset\}$

$x = T(x)$

def. ricorsiva

soluzioni sono i punti fissi di T

Quanti sono i punti fissi di T?

infiniti

$T(\{1\}) = \{\emptyset, 1\} = \{1\} \cup \{\emptyset\}$

$T(\{\emptyset, 1\}) = \{\emptyset, 1\} = \{\emptyset, 1\} \cup \{\emptyset\}$

$I_1 = \{\emptyset, 1, 2\}$ è punto fisso di T? SI $I_1 = T(I_1)$

$I_2 = \{1\}$ è punto fisso di T? NO $I_2 \neq T(I_2)$

$T(I_2) = \{\emptyset, 1\}$

Titolo nota 24/09/2015

$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ $T(X) = \mathbb{N} \setminus X$

differenza tra insiemi

$I_1 \setminus I_2$

$\underbrace{\{3,4,5\} \setminus \{3,7\}} = \{4,5\}$

tutti gli elementi di I_1 che non compaiono in I_2

$T(\{1\}) = \mathbb{N} \setminus \{1\} =$

$\{\emptyset, 2, 3, 4 \ldots \}$

$T(\{\}) = \mathbb{N} \setminus \{\} = \mathbb{N}$

$\{\} \neq \mathbb{N}$?

$X = T(X) = \mathbb{N} \setminus X$

Quanti sono i punti fissi di T?

Quante sono le soluzioni?

$X = \mathbb{N} \setminus X$

$\emptyset$

Titolo nota 24/09/2015

$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ $\qquad T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N},\ n-2 \in X\}$

$X = T(X)$

$$\underbrace{X = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}}$$

$n-2 \in \{\emptyset\}$
$n-2 = \emptyset$
$n = 2$

$\{\emptyset\}$ è p.f. di T? $\qquad T(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\emptyset\}\}$
$= \{\emptyset\} \cup \{2\}$
$= \{\emptyset, 2\}$ non è p.f.

$\{\emptyset, 2\}$ è p.f. di T? $\qquad T(\{\emptyset,2\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid \underline{n-2 \in \{\emptyset, 2\}}\}$
$= \{\emptyset\} \cup \{2, 4\}$
non è p.f. di T $= \{\emptyset, 2, 4\}$

$n-2 = \emptyset \quad n = 2$
$n-2 = 2 \quad n = 4$

Titolo nota 24/09/2015

$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ $\qquad T(X) = \{0\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N},\ n-2 \in X\}$

esiste un punto fisso di T?

Si! L'insieme (infinito) di tutti i numeri naturali pari è punto fisso di T

$\mathbb{P}$ è l'insieme di tutti i naturali pari

$$\mathbb{P} = T(\mathbb{P})$$
$$= \underline{\{0\}} \cup \{n \mid n-2 \in \mathbb{P}\}$$
$$= \mathbb{P}$$

$\{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \mathbb{P} \setminus \{0\}$

Titolo nota 24/09/2015

$$T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

$$T(\mathbb{N}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \mathbb{N}\}$$

$$= \{\emptyset, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

$$\neq \mathbb{N}$$

$n-2=0 \quad n=2$
$n-2=1 \quad n=3$
$n-2=2 \quad n=4$
$n-2=3 \quad n=5$
$\vdots \quad \vdots$

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

le cui equazioni ricorsive hanno:
- infiniti punti fissi
- ~~nessun punto fisso~~
- esattamente un punto fisso

Teorema di ricorsione

Titolo nota 24/09/2015

Ci dice:

- quando ci sono soluzioni a equazioni ricorsive (su insiemi)
- quali sono le soluzioni di riferimento e come trovarle.

Preliminari

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ si dice MONOTONA

se per $X_1, X_2 \in \mathbb{P}_A$

$$X_1 \subseteq X_2 \implies T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

contenimento tra insiemi (l'ordinamento che prendiamo)

Titolo nota 24/09/2015

$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$ $T(X) = X \cup \{1\}$ monotona

$X_1, X_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$

$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1 \cup \{1\} \subseteq X_2 \cup \{1\}$

è sempre vera!

$\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset, 1\} \Rightarrow T(\{\emptyset\}) \subseteq T(\{\emptyset, 1\})$

$\{\emptyset, 1\} \subseteq \{\emptyset, 1\}$

Vera!

Titolo nota 24/09/2015

$$T(X) = \begin{cases} \{\} & \text{se } \# X > 2 \\ \{1\} & \text{se } \# X \leq 2 \end{cases} \qquad T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$\#$ numero degli elementi

$T(\mathbb{N}) = \{\}$ $\quad$ $\# \mathbb{N}$ enumerabile

$T(\{0, 5, 25\}) = \{\}$ $\quad$ $\#\{0,5,25\} = 3$

$T(\{0\}) = \{1\}$ $\quad$ $\#\{0\} = 1$

T è monotona?

$\underline{\{0\}} \subseteq \{0, \underline{5, 25}\}$ ma $T(\{0\}) = \{1\}$

$T(\{0,5,25\}) = \{\}$

$\{1\} \not\subseteq \{\}$

Continuità

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

Data una catena $X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \ \ldots$ anche infinito

$X_i \in \mathbb{P}_A$

T è continua se e solo se (sse)

$$T\left(\bigcup_i X_i\right) = \bigcup_i T(X_i)$$

$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$ $\qquad$ $T(X) = X \cup \{1\}$

$X_1 \subseteq X_2 \subseteq X_3 \;\ldots$ anche infinite , $X_i \in \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$T\left(\bigcup_i X_i\right)$

= {def. di T}

$\left(\bigcup_i X_i\right) \cup \{1\}$

= {proprietà dell'unione}

$\bigcup_i \left(X_i \cup \{1\}\right)$

= {definizione di T}

$\bigcup_i T(X_i)$

T è continua

$T(X_i) = X_i \cup \{1\}$

T non è continua.

Titolo nota 24/09/2015

$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$$T(X) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \\ \{\} & \text{se } X \text{ è finito} \end{cases}$$

T è continua?

$X_1 \subseteq X_2 \ldots \ldots$

$T(\bigcup_i X_i) \neq \bigcup_i T(X_i)$

$X_1 = \{0\}$

$X_2 = \{0, 1\}$

$X_3 = \{0, 1, 2\}$

$\vdots$

$X_i = \{0, 1, \ldots, i-1\}$

$\vdots$

Catena infinita di insiemi finiti

$T(\bigcup_i X_i)$

$= \{$proprietà dell'unione e def. di $X_i\}$

$T(\mathbb{N})$

$= \{\text{def } T\}$

$\{1\}$

$\neq$

$\bigcup_i T(X_i)$

$= \{\text{def } T\}$

$\bigcup_i \{\}$

$= \{\text{def. } \cup\}$

$\{\}$

Titolo nota 24/09/2015

$T: \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$

$$T(X) = \begin{cases} \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \\ \{\} & \text{se } X \text{ è finito} \end{cases}$$

T è monotona?

X_1 finito e X_2 infinito

$T(X_1) = \{\}$ $T(X_2) = \{1\}$

$\{\} \subseteq \{1\}$

$X_1 \subseteq X_2$ $X_1, X_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$

- sono entrambi finiti

  $T(X_1) = \{\}$ e $T(X_2) = \{\}$, $\{\} \subseteq \{\}$

- sono entrambi infiniti

  $T(X_1) = \{1\}$ e $T(X_2) = \{1\}$, $\{1\} \subseteq \{1\}$

Teo $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

T continua $\Rightarrow$ T monotona

(una trasformazione continua è anche monotona)

Dim T continua prendiamo $X_1 \subseteq X_2$

$T(X_2)$

$= \{ X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1 \cup X_2 = X_2 \}$

$T(X_1 \cup X_2)$

$= \{ T \text{ è continua e } X_1 \subseteq X_2 \}$

$T(X_1) \cup T(X_2)$

$T(X_2) = T(X_1) \cup T(X_2)$

$\Longleftrightarrow$

$T(X_1) \subseteq T(X_2)$

T è anche monotona

Titolo nota 24/09/2015

Teorema di ricorsione

Se $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ è continua

allora:

1) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è un punto fisso di T
(soluzione della eq. ricorsiva $X = T(X)$)

2) $\underbrace{\text{per ogni } J \in \mathbb{P}_A \quad J = T(J)}_{\text{per ogni altro punto fisso di } T,\ J} \implies I \subseteq J$

Ci dà un modo per calcolare il minimo punto fisso di una trasformazione continua

Ci dà la soluzione canonica di una definizione ricorsiva.

Definizione

$$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$$

$$T^{i}(\{\})$$

$$T^{1}(\{\}) = T(\{\})$$

$$T^{n}(\{\}) = T\left(T^{n-1}(\{\})\right)$$

con $n > 1$

$$T^{3}(\{\})$$

$= \{ \text{def } T^{n},\ n > 1 \}$

$$T\left(T^{2}(\{\})\right)$$

$= \{ \text{def } T^{n},\ n > 1 \}$

$$T\left(T\left(T^{1}(\{\})\right)\right)$$

$= \{ \text{def } T^{n},\ n = 1 \}$

$$T\left(T\left(T(\{\})\right)\right)$$

Titolo nota 24/09/2015

$T: \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$

$T(X) = X \cup \{\emptyset\}$ infiniti punti fissi (tutti gli insiemi di $\mathbb{N}$ che contengono $\emptyset$)

$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\}) = \{\emptyset\}$

minimo punto fisso di T

$T^0(\{\}) = \{\}$

$T^1(\{\}) = T(\{\}) = \{\} \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$T^2(\{\}) = T(T^1(\{\})) = T(\underbrace{T(\{\})}_{\{\emptyset\}}) = T(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$T^3(\{\}) = \{\emptyset\}$

$T^4(\{\}) = \{\emptyset\}$ ...

Titolo nota 24/09/2015

$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \qquad T(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$

$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\}) = \mathbb{P}$ (l'insieme dei naturali pari)

$T^0(\{\}) = \{\}$

$T^1(\{\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\}\} = \{\emptyset\}$

$T^2(\{\}) = T(T(\{\})) = T(\{\emptyset\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, 2\}$

$T^3(\{\}) = T(T^2(\{\})) = T(\{\emptyset, 2\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\emptyset, 2\}\} = \{\emptyset, 2, 4\}$

$\vdots$

Lemma

Titolo nota 24/09/2015

$T : \wp_A \to \wp_A$

$$\boxed{T \text{ continua} \Rightarrow T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})}$$

Dim. per induzione naturale

P proprietà $P(n)$ se la proprietà P è vera su $n \in \mathbb{N}$

Induzione naturale

$$\left(P(\emptyset) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)) \right) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n))$$