Titolo nota

24/09/2015

Teorema di ricorsione

$T: \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua

1) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è un punto fisso di T

2) $J = T(J)$ $\quad I \subseteq J$ per ogni J (I è il minimo punto fisso)

Il minimo punto fisso è la SOLUZIONE DI RIFERIMENTO di una equazione ricorsiva

Induzione naturale

P una proprietà su $\mathbb{N}$

Principio di <u>induzione naturale</u>

$$\left(P(\emptyset) \wedge \left(\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)\right)\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n)\right)$$

Caso base

$P(\emptyset)$

Caso induttivo

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Spesso si dimostra facendo vedere che è vero $P(n+1)$ assumendo la <u>verità di $P(n)$</u>

ipotesi induttiva

Titolo nota 24/09/2015

Lemma

$T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continue

$$T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$$

$T^\emptyset(\{\}) = \{\}$

$T^{i+1}(\{\}) = T(T^i(\{\}))$

Caso base $T^\emptyset(\{\}) \subseteq T^1(\{\})$

$T^\emptyset(\{\})$

$= \{ \text{def } T^i(\{\}) \}$

$\{\}$

$\subseteq \{ \{\} \subseteq A \text{ per ogni } A \}$

$T^1(\{\})$

Caso induttivo $\underbrace{T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\})}_{\text{ipotesi induttiva}} \Rightarrow \underline{T^{n+1}(\{\}) \subseteq T^{n+2}(\{\})}$

$T^{n+1}(\{\})$

$= \{ \text{def. } T^n \}$

$T(T^n(\{\}))$

$\subseteq \{ \text{ip. induttiva } T^n(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\}),$ T è continue e quindi monotone $\}$

$T(T^{n+1}(\{\}))$

$= \{ \text{def. } T^n \}$

$T^{n+2}(\{\})$

Teorema di ricorsione $T : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_A$ è continua

1) $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è un punto fisso di T

$$T\left(\bigcup_i X_i\right) = \bigcup_i T(X_i)$$

continuità

Dim

$T(I)$

$= \{$ def $I \}$

$T\left(\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})\right)$

$= \{ T$ è continua, $T^i(\{\})$ è una catena (Lemma) $\}$

$\bigcup_{i \geq 0} T(T^i(\{\}))$

$= \{$ def. $T^n \}$

$\bigcup_{i \geq 0} T^{i+1}(\{\})$

$= \{$ calcolo $\}$

$\bigcup_{i \geq 1} T^i(\{\})$

$= \{ \{\} \cup A = A \}$

$\{\} \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\{\})$

$= \{ T^0(\{\}) = \{\} \}$

$T^0(\{\}) \cup \bigcup_{i \geq 1} T^i(\{\})$

$= \{$ calcolo $\}$

$\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$

$= \{$ def. $I \}$

I

Teorema di ricorsione $\qquad T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continua

Titolo nota $\qquad$ 24/09/2015

2) $\quad I \subseteq J \quad$ per ogni $\quad J = T(J)$

$\forall i \in \mathbb{N}.\ T^i(\{\}) \subseteq J$ $\quad$ | se riusciamo a dimostrare questo allora $\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\}) \subseteq J$ $\quad$ cioè $\quad I \subseteq J$

$\forall i \in \mathbb{N}.\ T^i(\{\}) \subseteq J \quad$ per induzione naturale

per ogni $\quad J = T(J)$

Data $T : \mathcal{P}_A \to \mathcal{P}_A$ continua

$T^i(\{\}) \subseteq J$ per ogni $J = T(J)$

Caso base

$T^0(\{\}) \subseteq J$

$$T^0(\{\}) \overset{\{\text{def } T^i\}}{=} \{\} \overset{\{\{\} \subseteq A \text{ per ogni } A\}}{\subseteq} J$$

Caso induttivo

$$\underbrace{T^n(\{\}) \subseteq J}_{\text{ipotesi induttiva}} \Rightarrow T^{n+1}(\{\}) \subseteq J$$

$$T^{n+1}(\{\})$$

$= \{$def $T^i\}$

$$T(T^n(\{\}))$$

$\subseteq \{$ip. induttiva, T è continua e quindi monotona$\}$

$$T(J)$$

$= \{J$ è p. fisso di $T\}$

$$J$$

equazione ricorsiva $D = T(D)$

Titolo nota 24/09/2015

$$D = \{1\} \cup \{n \mid n-2 \in D\} \qquad D \subseteq \mathbb{N} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$T(X) = \{1\} \cup \{n \mid n-2 \in X\}$$

$$T^{\varnothing}(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = T(T^{\varnothing}\{\}) = T(\{\}) = \{1\} \cup \{n \mid n-2 \in \{\}\} = \{1\}$$

$$T^2(\{\}) = T(T^1(\{\})) = T(\{1\}) = \{1\} \cup \{\underline{n \mid n-2 \in \{1\}}\} = \{1, 3\}$$

$$T^3(\{\}) = T(T^2(\{\})) = T(\{1,3\}) = \{1\} \cup \{n \mid n-2 \in \{1,3\}\} = \{1,3,5\}$$

$\vdots$

minimo punto fisso è infinito ed è l'insieme dei numeri naturali dispari

$n-2 \in \{1\}$

$n-2 = 1$

$n = 3$

$n-2 = 1$

$n = 3$

$n-2 = 3$

$n = 5$

Il Teorema di ricorsione si applica alla definizione ricorsiva di insiemi

- Definizioni ricorsive di grammatiche $S \to ab \mid aSb$
- Def. ricorsive di funzioni $fact(n) = $ if $n = \emptyset$ then 1 else $n * fact(n-1)$

Come si applica il teo. di ricorsione a def. ricorsive di grammatiche e funzioni?

Si cerca di trasformare def. di grammatiche e funzioni ... def. di insiemi.

Grammatiche viste come definizione di "Insiemi di stringhe"

$$S \rightarrow \underset{=}{ab} \mid aSb$$

$=$

$\cup$

sequenze dovute "concatenazione tra insiemi"

$$AB = \{\alpha\beta \mid \alpha \in A,\ \beta \in B\}$$

$$\underbrace{\{a, aa\}}_{A}\ \underbrace{\{b, bb\}}_{B} = \{ab, abb, aab, aabb\}$$

$$\underbrace{S = \{a\}\{b\} \cup \{a\}S\{b\}}_{\text{definizione ricorsiva di insieme}}$$

$$S = T(S)$$

$$T(X) = \{a\}\{b\} \cup \{a\}X\{b\}$$

$S = T(S)$

$T(X) = \{a\}\{b\} \cup \{a\} \times \{b\}$ $\qquad I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$

$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$

$T^1(\{\}) = T(\{\}) = \{a\}\{b\} \cup \underbrace{\{a\}\{\}\{b\}}_{=\{\}} = \{ab\}$

$T^2(\{\}) = T(T^1(\{\})) = \{a\}\{b\} \cup \{a\}\{ab\}\{b\} = \{ab, aabb\}$

$T^3(\{\}) = T(T^2(\{\})) = \{a\}\{b\} \cup \{a\}\{ab, aabb\}\{b\} = \{ab, aabb, aaabbb\}$

$\vdots$

$I = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ $\qquad S \to ab \mid aSb$

$$B \to (\,)\ |\ (\,B\,)\ |\ BB$$

ambigue

$$B = \{(\}\{)\} \cup \{(\}\,B\,\{)\} \cup BB \qquad B = T(B)$$

$$T(X) = \{(\}\{)\} \cup \{(\}\,X\,\{)\} \cup X\,X$$

$$T^0(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = T(\{\}) = \{(\}\{)\} \cup \underbrace{\{(\}\{\}\{)\}}_{=\{\}} \cup \underbrace{\{\}\{\}}_{=\{\}} = \{\,(\,)\,\}$$

$$T^2(\{\}) = T(T^1(\{\})) = \{(\}\{)\} \cup \{(\}\{(\,)\}\{)\} \cup \{(\,)\}\{(\,)\} = \{\,\underline{(\,),\ ((\,)),\ (\,)(\,)}\,\}$$

$$T^3(\{\}) = T(T^2(\{\})) = \{(\}\{)\} \cup \{(\}\{(\,),((\,)),(\,)(\,)\}\{)\} \cup$$

$$\{(\,),((\,)),(\,)(\,)\}\{(\,),((\,)),(\,)(\,)\} =$$

$$\{\ (\,),\ ((\,)),\ (((\,))),\ ((\,)(\,)),\ (\,)(\,),\ (\,)((\,)),\ (\,)(\,)(\,),\ ((\,))(\,)\ \ldots\ \}$$

$L = \{a^n b^m \mid n, m > 0\}$

Titolo nota 24/09/2015

$$A \to aA \mid aB \qquad A = T_A(A, B)$$
$$B \to b \mid bB \qquad B = T_B(A, B)$$

$$T_A(X, Y) = \{a\}X \cup \{a\}Y$$
$$T_B(X, Y) = \{b\} \cup \{b\}Y$$

$$T_A^0(\{\}, \{\}) = \{\}$$
$$T_B^0(\{\}, \{\}) = \{\}$$

$$T_A^1(\{\}, \{\}) = \{a\}\{\} \cup \{a\}\{\} = \{\}$$
$$T_B^1(\{\}, \{\}) = \{b\} \cup \{b\}\{\} = \{b\}$$
$$T_A^2(\{\},\{\}) = T_A(T_A^1(\{\}), T_B^1(\{\})) = \{a\}\{\} \cup \{a\}\{b\} = \{ab\}$$
$$T_B^2(\{\},\{\}) = T_B(\;''\;,\;''\;) = \{b\} \cup \{b\}\{b\} = \{b, bb\}$$

$$T_A^3(\{\}, \{\}) =$$

$$T_A(\{ab\}, \{b, bb\}) = \{a\}\{ab\} \cup \{a\}\{b, bb\}$$
$$T_B(\{ab\}, \{b, bb\}) = \{b\} \cup \{b\}\{b, bb\}$$

$$\{aab, ab, abb\}$$

$$\{b, bb, bbb\}$$

Titolo nota 24/09/2015

Definizioni di funzioni?

Come si può applicare il Teo. di ricorsione?

$fact : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$fact(n) = $ if $n = \emptyset$ then 1
else $n * fact(n-1)$

GRAFICO DI UNA FUNZIONE f (INSIEME)

$$F = \{ (x, y) \mid y = f(x) \}$$

posso applicare il teorema di ricorsione

Occorre, data una definizione di funzione, passare alla definizione del "grafico" della funzione

$$fact(n) = \text{if } n = 0 \text{ then } 1 \text{ else } n * fact(n-1)$$

$$(n-1, m) \in \underline{\underline{Fact}}$$

$$(n, n*m)$$

$$(n, n*m)$$

$$Fact = \{(0,1)\} \cup \{(n, n*m) \mid (n-1, m) \in Fact\}$$

$$Fact = T(Fact)$$

$$T(X) = \{(0,1)\} \cup \{(n, n*m) \mid (n-1, m) \in X\}$$

$$T(X) = \{(0,1)\} \cup \{(n, n*m) \mid (n-1, m) \in X\}$$

$$T: \mathcal{P}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$

$$T^0(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = T(\{\}) = \{(0,1)\} \cup \{(n, n*m) \mid (n-1, m) \in \{\}\} = \{(0,1)\}$$

$$T^2(\{\}) = T(\{(0,1)\}) = \{(0,1)\} \cup \{(n, n*m) \mid \underline{(n-1, m) \in \{(0,1)\}}\} =$$

$$= \{(0,1), (1,1)\}$$

$(n-1, m) = (0,1)$

$n-1 = 0 \quad n = 1$

$m = 1$

$$T^3(\{\}) = T(\{(0,1), (1,1)\}) = \{(0,1)\} \cup \{(n, \underline{n*m}) \mid (\underline{n-1}, m) \in \{(0,1), (1,1)\}\}$$

$$= \{(0,1), (1,1), (2,2)\}$$

$n-1 = 0 \quad n = 1$

$m = 1$

$$T^4(\{\}) = T(\{(0,1), (1,1), (2,2)\}) = \{(0,1)\} \cup \{(n, n*m) \mid (n-1, m) \in \{(0,1), (1,1), (2,2)\}\}$$

$n-1 = 0 \quad n = 1$

$m = 1$

$n-1 = 1 \quad n = 2$

$m = 1$

$n-1 = 1 \quad n = 2$

$m = 1$

$n-1 = 2 \quad n = 3$

$m = 2$

$$\{(0,1), (1,1), (2,2), (3,6)\} \quad \dots$$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n \leq 1 \\ 1 + f(n-2) & \text{altrimenti} \end{cases} \equiv$$

$f(n) =$ if $n \leq 1$ then $\emptyset$
else $1 + f(n-2)$