$$T(X) = \{(\varnothing,\varnothing),\ (1,\varnothing)\} \cup \{(n,\ m+1) \mid (n-2,\ m) \in X\}$$

$$T^{\varnothing}(\{\}) = \{\}$$

$$T^{1}(\{\}) = T(\{\}) = \{(\varnothing,\varnothing),\ (1,\varnothing)\} \cup \{(n,m+1) \mid (n-2,m) \in \{\}\} = \{(\varnothing,\varnothing),(1,\varnothing)\}$$

$$T^{2}(\{\}) = T(T^{1}(\{\})) = \{\quad '' \quad\} \cup \{(n,m+1) \mid (n-2,m) \in \{(\varnothing,\varnothing),\ (1,\varnothing)\}\}$$

$$= \{(\varnothing,\varnothing),(1,\varnothing),\ (2,1),\ (3,1)\}$$

$n = 2$
$m+1 = 1$

$n-2 = \varnothing$
$m = \varnothing$

$n = 3$
$n-2 = 1$
$m = \varnothing$
$m+1 = 1$

$$T^{3}(\{\}) = \{\quad '' \quad\} \cup \{(n,\ m+1) \mid (n-2,m) \in \{(\varnothing,\varnothing),\ (1,\varnothing),\ (2,1),\ (3,1)\}\}$$

$n-2 = \varnothing$, $m = \varnothing$

$n-2 = 1$, $m = \varnothing$

$n-2 = 2$, $m = 1$

$n-2 = 3$, $m = 1$

$$\{(\varnothing,\varnothing),\ (1,\varnothing),\ (2,1),\ (3,1),\ (4,2),\ (5,2)\}$$

$\vdots$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Titolo nota 24/09/2015

$$g(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = 0 \\ g(n-1)+2 & \text{altrimenti } (n>0) \end{cases}$$

$$G = \{(\emptyset, \emptyset)\} \cup \{(n, m+2) \mid (n-1, m) \in G\}$$

$$G = T(G) \qquad T(X) = \{(\emptyset,\emptyset)\} \cup \{(n, m+2) \mid (n-1, m) \in X\}$$

$$T : \mathcal{P}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$

$$T(X) = \{(\emptyset,\emptyset)\} \cup \{(n, n+2) \mid (n-1, n) \in X\}$$

$$T^{\emptyset}(\{\}) = \{\}$$

$$T^{1}(\{\}) = \{(\emptyset,\emptyset)\} \cup \{(n, n+2) \mid (n-1, n) \in \{\}\}) = \{(\emptyset,\emptyset)\}$$

$$T^{2}(\{\}) = \{(\emptyset,\emptyset)\} \cup \{(\underline{n, n+2}) \mid \underline{(n-1, n) \in \{(\emptyset,\emptyset)\}}\} = \underline{\{(\emptyset,\emptyset), (1,2)\}}$$

$n-1 = 0 \quad n = 1$

$n = \emptyset$

$$T^{3}(\{\}) = \{(\emptyset,\emptyset)\} \cup \{(\underline{n, n+2}) \mid (n-1, n) \in \{(\emptyset,\emptyset), (1,2)\}\}$$

$n-1 = \emptyset$
$n = \emptyset$

$n-1 = 1$
$n = 2$

$$= \{(\emptyset,\emptyset), (1,2), (2,4)\}$$

$\vdots$

$$\boxed{g(n) = 2 \cdot n}$$

Titolo nota 24/09/2015

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$g(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = \emptyset \\ g(n-1)+2 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} .\ \underline{g(n) = 2 \cdot n} \right)$$

Induzione naturale

Caso base $P(0)$

$g(\emptyset) = 2 \cdot \emptyset$

$g(\emptyset)$

$= \{ \text{def. } g, 1^{\circ} \text{ caso} \}$

$\emptyset$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$2 \cdot \emptyset$

Caso induttivo $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

ipotesi induttiva $g(n) = 2 \cdot n \Rightarrow g(n+1) = 2 \cdot (n+1)$

$g(n+1)$

$= \{ \text{def } g, 2^{\circ} \text{ caso} \}$

$g(n+\cancel{1}-\cancel{1}) + 2$

$= \{ \text{ip. indutt. } g(n) = 2 \cdot n \}$

$2 \cdot n + 2$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$2 \cdot (n+1)$

Teo. ricorsione

Titolo nota 24/09/2015

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = 1 \\ f(n+1)+1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F = \{(1,\emptyset)\} \cup \{(n, n+1) \mid (n+1, n) \in F\}$$

$F = T(F)$

$$T(X) = \{(1,\emptyset)\} \cup \{(n, n+1) \mid (n+1, n) \in X\}$$

$f(\emptyset) = f(1)+1 = \emptyset + 1 = 1$

$f(1) = \emptyset$

$f(2) = f(3)+1 = f(4)+1+1 =$

....

$f(3) = f(4)+1 = f(5)+1+1 =$

.....

definita solamente in $\emptyset$ e 1

$F = \{(\emptyset, 1), (1, \emptyset)\}$

$$T(X) = \{(1,0)\} \cup \{(n, m+1) \mid (n+1, m) \in X\}$$

Titolo nota 24/09/2015

$$T^0(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = \{(1,0)\} \cup \{(n,m+1) \mid (n+1,m) \in \{\}\} = \{(1,0)\}$$

$$T^2(\{\}) = \{(1,0)\} \cup \{(n,m+1) \mid (n+1,m) \in \{(1,0)\}\} =$$

$n+1 = 1 \quad n = 0$

$m = 0 \quad m = 0$

$$\{(1,0),(0,1)\}$$

$$T^3(\{\}) = \{(1,0)\} \cup \{(n,m+1) \mid (n+1,m) \in \{(1,0),(0,1)\}\}$$

$n+1 = 1 \quad n = 0$

$m = 0$

$n+1 = 0$

$m = 1$

$\cancel{n = -1}$

$$\{(1,0),(0,1)\}$$

minimo punto fisso di T

$$T(\{(1,0),(0,1)\}) = \{(1,0),(0,1)\}$$

$$T(I) = I$$

Progetto di funzioni ricorsive

Basare nel principio di induzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Definire una funzione ricorsiva, f, tale che $(\forall n.\ f(n) = 3 \cdot n + 1)$

Principio di induzione naturale

Caso base

$f(\emptyset) = 3 \cdot \emptyset + 1$

$f(\emptyset) = 1$

Caso induttivo $f(n) = 3 \cdot n + 1 \Rightarrow f(n+1) = 3 \cdot (n+1) + 1$

$f(n+1) = 3 \cdot (n+1) + 1 = 3 \cdot n + 3 + 1$

$f(n) = 3 \cdot n + 1$

ip. induttiva è vera

$= f(n) + 3$

Titolo nota 24/09/2015

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ f(n-1) + 3 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$$\left(\forall n \in \mathbb{N} .\ f(n) = 3n + 1 \right)$$

$f(0) = 3 \cdot 0 + 1$

$f(0) = 1$

Caso induttivo $f(n) = 3 \cdot n + 1 \Rightarrow f(n+1) = 3 \cdot (n+1) + 1$

$f(\underline{\underline{n+1}}) = 3 \cdot (n+1) + 1 = 3 \cdot n + 3 + 1$

$f(n) = 3 \cdot n + 1$

ip. induttiva è vera

$$= f(\underline{\underline{n}}) + 3$$

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ f(n-1) + 3 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N} .\ f(n) = 3n + 1)$$

Caso base

$f(0) = 3 \cdot 0 + 1$

$f(0)$

$= \{\text{def } f.\ 1° \text{ caso}\}$

1

$= \{\text{calcolo}\}$

$3 \cdot 0 + 1$

ip. induttiva

Caso induttivo $f(n) = 3 \cdot n + 1 \Rightarrow f(n+1) = 3 \cdot (n+1) + 1$

$f(n+1)$

$= \{n+1 > 0 .\ \text{def } f,\ 2° \text{ caso}\}$

$f(n) + 3$

$= \{\text{ip. induttiva}\}$

$3 \cdot n + 1 + 3$

$= \{\text{calcolo}\}$

$3 \cdot (n+1) + 1$

Titolo nota — 24/09/2015

Definire una funzione $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ricorsiva tale che $(\forall n \in \mathbb{N}.\ g(n) = 2n+3)$

$$g(n) = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 0 \\ g(n-1) + 2 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

Principio di induzione naturale

Caso base $\quad g(0) = 2 \cdot 0 + 3$

$g(0)$

$=$

$2 \cdot 0 + 3$

$= 3$

Caso induttivo

ip. induttiva

$g(n) = \underline{2 \cdot n + 3} \Rightarrow g(n+1) = 2(n+1) + 3$

$= 2n + 2 + 3$

$g(n+1)$

$= \{$def g, 2° caso$\}$

$g(n) + 2$

$= \{$ip induttiva$\}$

$2n + 3 + 2$

$= \{$calcolo$\}$

$= \underline{2 \cdot (n+1) + 3}$

Titolo nota 24/09/2015

Definire una funzione, g, $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $(\forall n, m \in \mathbb{N}.\ g(n,m) = 3n + m)$

Principio di induzione naturale che serve per dimostrare proprietà su $\mathbb{N}$. $(\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n))$

→ proprietà su $\underline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

Non posso usare l'induzione naturale per .

- definire la funzione
- dimostrarne proprietà

Titolo nota 24/09/2015

PRINCIPIO DI INDUZIONE "BEN FONDATA"

Si basa su una relazione di "PRECEDENZA" su valori di un insieme.

$a \prec b$ a precede b

$a \sqsubset b$

$a < b$

La relazione di ordinamento su $\mathbb{N}$, $<$ è una relazione di precedenza $1 < 2$, $2 < 3$, $3 < 4$ ....

Un insieme A con una relazione di precedenza, $\prec$, su A

si dice "BEN FONDATO" se NON ci sono catene infinite discendenti secondo $\prec$

$$a_0, a_1, a_2, \dots \in A$$

$$a_0 \succ a_1 \succ a_2 \succ \cdots$$

infinita

A è ben fondato

$(\mathbb{N}, <)$ $(\mathbb{Z}, <)$

$\emptyset < 1 < 2 < \cdots$

$\emptyset - 1 - 2 - 3 - \cdots$

$\cdots - -3 - -2 - -1 - \emptyset - 1 - 2 - \cdots$

$(\mathbb{N}, <)$

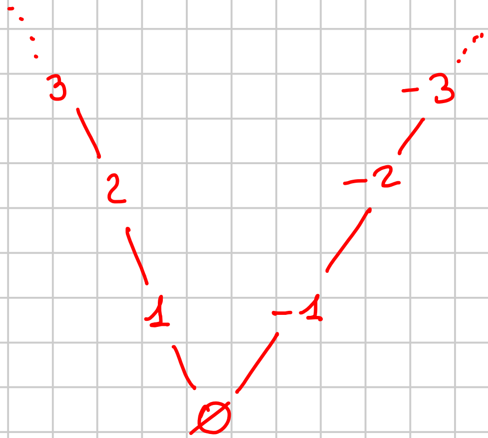
BEN FONDATO

$(\mathbb{Z}, <)$

NON E' BEN FONDATO

$$(\mathbb{Z}, \prec)$$

$$\Big(\forall n, m \in \mathbb{Z} \,.\, n \prec m \equiv (n \geq 0 \wedge m > 0 \wedge m = n+1) \vee (\underline{n \leq 0} \wedge \underline{m < 0} \wedge m = n-1)\Big)$$



$(\mathbb{Z}, \prec)$ è BEN FONDATO

Dato un insieme ben fondato $(A, \prec)$

Titolo nota 24/09/2015

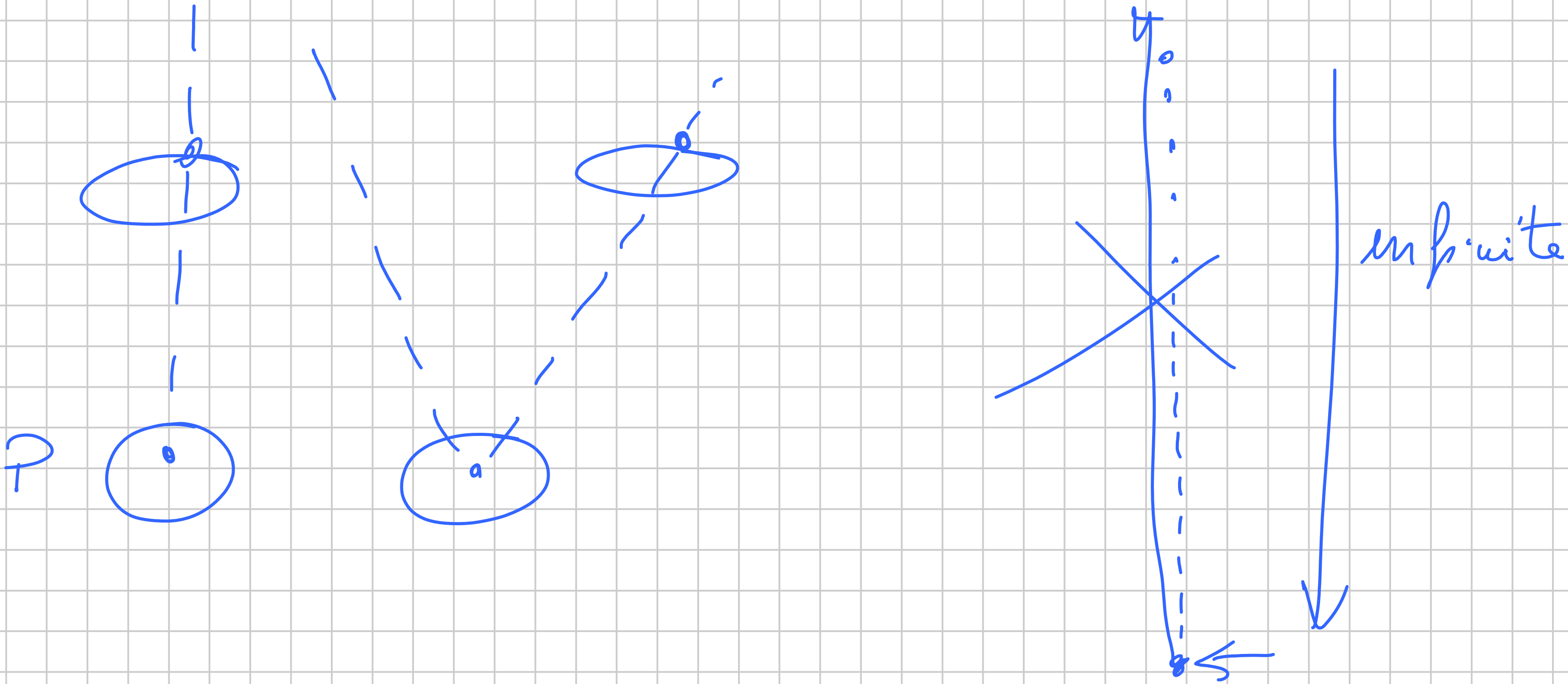
PRINCIPIO DI INDUZIONE "BEN FONDATA"

ci dice:

Data una proprietà P

- Se dimostriamo la proprietà su tutti gli elementi "MINIMALI" di A secondo $\prec$ (gli elementi che non sono preceduti da altri elementi)
- Se, supposta vera la proprietà P su tutti gli elementi che precedono un generico elemento $n \in A$, si può dimostrare la proprietà su n

Allora la proprietà vale su tutti gli elementi di A, $(\forall n \in A . P(n))$


P
infinite

Titolo nota 24/09/2015

PRINCIPIO DI INDUZIONE BEN FONDATA su $(A, <)$

$$\Big(\forall n \in A \; \Big(\big(\forall m . \; m < n \Rightarrow P(m) \big) \Rightarrow \underline{\underline{P(n)}} \Big) \Big)$$

$$\Rightarrow \big(\forall n \in A . \; P(n) \big)$$

supponendo vera la proprietà negli elementi che precedono n

e i minimali ?
(perché possono essere più di uno)
$m < n$ se n è minimale

è sempre vera

la proprietà vale su tutto A

Titolo nota

24/09/2015

Teorema di ricorsione

Titolo nota 24/09/2015

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n \leq 1 \\ f(n-2)+1 & \text{altrimenti } (n > 1) \end{cases}$$

$\equiv$

$f(n) = \text{if } n \leq 1 \text{ then } \emptyset$
$\text{else } f(n-2)+1$

$$F = \{(\emptyset,\emptyset),(1,\emptyset)\} \cup \{(n, m+1) \mid (n-2, m) \in F\}$$

$$F = T(F) \qquad T(X) = \{(\emptyset,\emptyset),(1,\emptyset)\} \cup \{(n,m+1) \mid (n-2,m) \in X\}$$

$$T : \mathbb{P}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \to \mathbb{P}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$