Titolo nota 24/09/2015

INDUZIONE BEN FONDATA

$(A, <)$ ben fondato

supponiamo n minimale

false

$\text{true} \Rightarrow P(n) \equiv P(n)$

$$\Big(\forall n \in A.\ \big(\forall m \in A.\ m < n \Rightarrow P(m)\big) \Rightarrow P(n)\Big)$$

true $\equiv$

supponiamo vera la proprietà su tutti gli elementi che precedono n

sulla base di questa supposizione riusciamo a dimostrare la proprietà su n

$$\Rightarrow \big(\forall n \in A.\ P(n)\big)$$

Che cosa dice questa formula sugli elementi n minimali

$$f(n, m) = \begin{cases} m & \text{se } n = \emptyset \\ m+1 & \text{se } n = 1 \\ f(n-1, m) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$\prec$

$(\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n, m) = n + m)$ per induzione ben fondata

$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \prec)$

$\prec$: precedenza INDOTTA dalla definizione di funzione

↳ l'argomento della CHIAMATA RICORSIVA precede l'argomento della funzione

$$f(n, m) = \begin{cases} m & \text{se } n = \emptyset \\ m+1 & \text{se } n = 1 \\ f(n-1, m) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$\prec$

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$(\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n, m) = n + m)$ per induzione ben fondata

$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \prec)$

precedenza INDOTTA dalla definizione di funzione

↳ l'argomento della CHIAMATA RICORSIVA precede l'argomento della funzione

$$f(n, m) = \begin{cases} m & \text{se } n = \emptyset \\ m+1 & \text{se } n = 1 \\ f(n-1, m) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$\prec$

$(\forall n, m \in \mathbb{N} .\ f(n, m) = n + m)$ per induzione ben fondata

$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \prec)$ informalmente $(n-1, m) \prec (n, m)$

formalmente $(\forall n, m, n', m' \in \mathbb{N} .\ (n, m) \prec (n', m') \equiv$

$((m = m' \wedge n = n' - 1)))$ $\quad (m = m' \wedge n' = n + 1)$

$\equiv$

$(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \prec)$ è ben fondato?

$$(\forall n, m, n', m' \in \mathbb{N}.\ (n, m) \prec (n', m') \equiv (n = n' - 1 \wedge m = m'))$$

$$(4,5)$$
$$\vdots \quad | \quad \vdots$$
$$(3,5)$$
$$|$$
$$(2,5)$$
$$|$$
$$(1,5)$$
$$|$$
$$(0,5)$$

$$(n, m)$$
$$|$$
$$(n-1, m)$$
$$\vdots$$
$$(0, m)$$

infiniti elementi minimali della rel. di precedenza $\prec$

Titolo nota 24/09/2015

$(\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n,m) = n + m)$ $\qquad (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <)$

$$f(n,m) = \begin{cases} m & \text{se } n = \emptyset \\ f(n-1, m) + 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$(n+1, m)$
(n, m)
$(n-1, m)$
$\vdots$
$(\emptyset, m)$

Caso base (infiniti)

$f(\emptyset, m) = \emptyset + m$

$f(\emptyset, m)$
$= \{\text{def } f,\ 1^\circ \text{ caso}\}$
m
$= \{\text{calcolo}\}$
$\emptyset + m$

Caso induttivo $\underbrace{f(n,m) = n+m}_{\text{ip. induttiva}} \Rightarrow f(n+1, m) = (n+1) + m$

$f(n+1, m)$
$= \{\text{def. } f,\ 2^\circ \text{ caso}\}$
$f(n,m) + 1$
$= \{\text{ip. induttiva}\}$
$n + m + 1$
$= \{\text{calcolo}\}$

$(n+1) + m$

Definire ricorsivamente una funzione. Come faccio?
Utilizzando l'induzione ben fondata.

$$\left(\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n,m) = 3n + m + 1 \right)$$

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\left(\forall n, m, n', m'.\ (n,m) \prec (n',m') \equiv \left(m = m' \wedge n = n' - 1 \right) \right)$$

(n, m)

$|$

$(n-1, m)$

$\vdots$

$(\emptyset, m)$

$$\left(\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n,m) = 3\cdot n + m + 1\right)$$

$$f(n,m) = \begin{cases} m+1 & \text{se } n=\emptyset \\ f(n-1,m)+3 & \text{altrimenti } (n>0) \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} (n,m) \\ | \\ (n-1,m) \\ \vdots \\ (\emptyset,m) \end{array}$$

Caso base $f(\emptyset,m) = 3\cdot\emptyset + m + 1$

$$\begin{aligned} & f(\emptyset,m) \\ = & \{\text{def. } f,\ 1^\circ \text{ caso}\} \\ & m+1 \\ = & \{\text{calcolo}\}\ 3\cdot\emptyset + m + 1 \end{aligned}$$

Caso induttivo $\underbrace{f(n,m) = 3n+m+1}_{\text{ip. induttiva}} \Rightarrow f(n+1,m) = 3(n+1)+m+1$

$$\begin{aligned} & f(n+1,m) \\ = & \{\text{def } f,\ 2^\circ \text{ caso}\} \\ & f(n,m)+3 \\ = & \{\text{ip. ind.}\} \\ & 3\cdot n + m + 1 + 3 \\ = & \ 3\cdot(n+1) + m + 1 \end{aligned}$$

$$\left(\forall n, m.\ f(n,m) = \underline{3n + m + 1}\right) \qquad (\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \sqsubset)$$

$$\left(\forall n, m, n', m' \in \mathbb{N}.\ (n,m) \sqsubset (n',m') \equiv\right.$$

$$\left(\left(\underline{n' > 0 \wedge n = n'-1 \wedge m = m'}\right) \vee \left(\underline{n' = 0 \wedge n = n' \wedge m = m'-1}\right)\right)$$

(n', m') $\quad n' > 0$

$(n'-1, m')$

$\vdots$

$(0, m')$

$(0, m'-1)$

$\vdots$

$(0, 0)$

$$f(n,m) = \begin{cases} \\ f(n-1, m) \ldots \\ f(n, m-1) \ldots \end{cases}$$

Caso base $n=0$ e $m=0$

Casi induttivi $n > 0$

$n = 0$ e $m > 0$

$$\left(\forall n, m.\ f(n,m) = 3 \cdot n + m + 1\right)$$

Titolo nota 24/09/2015

$$f(n,m) = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \text{ e } m=0 \\ f(n-1,m)+3 & \text{se } n>0 \\ f(n,m-1)+1 & \text{se } n=0 \text{ e } m>0 \end{cases}$$

Caso induttivo: $n>0$ ip. indutt. $f(n-1,m) = 3\cdot(n-1)+m+1$

$\Rightarrow f(n, m) = 3 \cdot n + m + 1$

$f(n,m)$

$= \{\text{def. } f,\ n>0,\ 2° \text{ caso}\}$

$f(n-1,m)+3$

$= \{\text{ip. induttiva}\}$

$3\cdot(n-1)+m+1+3$

$= \{\text{Calcolo}\}$

$3\cdot n + m + 1$

Caso base $f(0,0) = 3\cdot 0 + 0 + 1$

⋮

Caso induttivo $m>0$ ip. ind. $f(0,m-1) = 3\cdot 0 + (m-1)+1 \Rightarrow f(0,m) = 3\cdot 0 + m + 1$

$f(0,m)$

$= \{\text{def } f,\ 3° \text{ caso}\}$

$f(0,m-1)+1$

$= \{\text{ip. induttiva}\}$

$3\cdot 0 + (m-1)+1+1$

$= \{\text{Calcolo}\}$

$3\cdot 0 + m + 1$

Titolo nota 24/09/2015

$$\left(\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n,m) = 3 \cdot n + m + 1\right) \qquad (\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \sqsubset)$$

$$\left(\forall n, m, n', m' \in \mathbb{N}.\quad (n,m) \sqsubset (n', m') \equiv \left(n = n' - 1 \ \wedge\ m = m' + 1\right)\right)$$

$$(n, m) \qquad n > 0$$

$$(n-1, m+1)$$

$$\vdots$$

$$(\emptyset, m+n)$$

precedere $\sqsubset$

è ben fondato su

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$?

SI !

Titolo nota 24/09/2015

$$\left(\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n,m) = 3\cdot n + m + 1\right)$$

$$f(\underline{n,m}) = \begin{cases} m+1 & \text{se } n=0 \\ f(n-1, m+1)+2 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ip. indutt.

$n-1 \neq \emptyset$

Caso base $f(\emptyset, m) = 3\cdot\emptyset + m + 1$

ovvio

Caso induttivo $f(n-1, m+1) = 3\cdot(n-1) + (m+1) + 1 \Rightarrow f(n,m) = 3\cdot n + m + 1$

$f(n,m)$

$= \{\text{def. } f, 2° \text{ caso}\}$

$f(n-1, m+1) + 2$

$= \{\text{ip. induttiva}\}$

$3\cdot(n-1) + (m+1) + 1 + 2$

$= 3n - 3 + m + 1 + 1 \ldots$

$= 3n + m - 1 \ldots + 2$

$= \{\text{calcolo}\}$

$3\cdot n + m + 1$

$$\left(\forall n, m.\ f(n,m) = 3 \cdot n + m + 1\right) \qquad \lessdot$$

$$\left(\forall n, m, n', m' \in \mathbb{N}.\quad (n,m) \lessdot (n', m') \equiv \left(n = n'-2 \ \wedge\ m = m'-1\right)\right)$$

BEN FONDATA

(n, m)

$(n-2, m-1)$

$(0, m) \qquad (1, m) \qquad (n, 0)$

$(1, 25) \quad (25, 0)$

$(1, 0) \quad (0, 0)$

Titolo nota 24/09/2015

$\forall n, m \in \mathbb{N}.\ f(n,m) = 3n + m + 1$

$$f(n,m) = \begin{cases} m+1 & \text{se } n = \emptyset \text{ e } m \geq 0 \\ m+4 & \text{se } n = 1 \text{ e } m \geq 0 \\ 3n+1 & \text{se } m = \emptyset \\ f(n-2, m-1) + 7 & \text{altrimenti } (n > 1 \text{ e } m \geq 0) \end{cases}$$

Casi base

$f(\emptyset, m) = 3 \cdot \emptyset + m + 1$

$f(1, m) = 3 \cdot 1 + m + 1$

$f(n, \emptyset) = 3 \cdot n + \emptyset + 1$

ovvi

Caso induttivo $(n > 1 \text{ e } m \geq 0)$

ip. induttiva

$f(n-2, m-1) = 3 \cdot (n-2) + (m-1) + 1 \Rightarrow f(n,m) = 3 \cdot n + m + 1$

$f(n,m)$

$= \{\text{def. } f,\ n>1 \text{ e } m \geq 0,\ 2^\circ \text{ caso}\}$

$f(n-2, m-1) + 7$

$= \{\text{ip. indutt}\}$

$3 \cdot (n-2) + (m-1) + 1 + 7$

$= \{\text{Calcolo}\}$

$3 \cdot n + m + 1$

$\boxed{3n - 6 + \cancel{m} - \cancel{1} + \cancel{1} \ldots + 7}$