FRAME

$f : A \to B_\perp$ operazione di AGGIUNTA di una associazione

f

a	10
b	20

$f\left[{}^{5}\!/_{c}\right]^{add}$

a	10
b	20
c	5

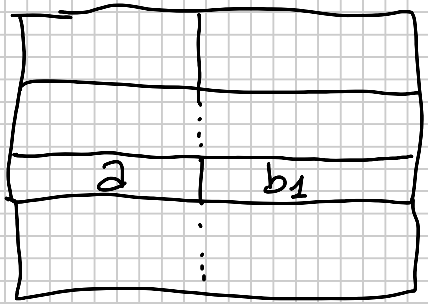
$f : Nomi \to \mathbb{N}_\perp$

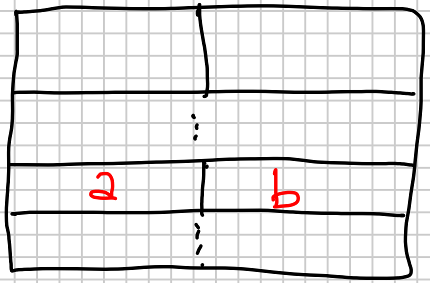
L'operazione di aggiunta $f\left[{}^{b}\!/_{a}\right]^{add}$ è definita se $f(a) = \perp$

$$f\left[{}^{b}\!/_{a}\right]^{add}(x) = \begin{cases} b & \text{se } x = a \\ f(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

MODIFICA di una associazione

$f : A \to B_{\perp}$, $a \in A$ $b \in B$. Supponiamo $f(a) \neq \perp$

f 

$f\left[\,{}^{b}\!/_{a}\right]^{mod}$ 

$$f\left[\,{}^{b}\!/_{a}\right]^{mod}(x) = \begin{cases} b & \text{se } x = a \\ f(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Titolo nota 12/10/2015

a_1	10
a_2	20
a_3	30

$f : \text{Nomi} \longrightarrow \mathbb{N}_\perp$

$f(a_1) = 10$

$f(a_2) = 20$

$f(a_3) = 30$

$f(\text{pippo}) = \perp$

$f(\text{pluto}) = \perp$

$\vdots$

$f(a_4) = \perp$

$f' = f\left[{}^{10}\!/\!{}_{\underline{a_4}}\right]^{\text{add}}$ ok perché $f(a_4) = \perp$

f':

a_1	10
a_2	20
a_3	30
a_4	10

f'':

a_1	10
a_2	~~20~~ 50
a_3	30
a_4	10

$f'' = f'\left[{}^{50}\!/\!{}_{\underline{a_2}}\right]^{\text{mod}}$ ok. perché $f'(a_2) = f(a_2) = 20 \neq \perp$

$f''(\underline{a_1}) = f'(a_1) = f(a_1) = 10$

Titolo nota 12/10/2015

RIASSUMENDO

$$f : A \to B_\perp$$

① valore associato ad $a \in A$

$f(a)$ applicazione della funzione (frame) f ad a

N.B. $f(a) = \perp$ significa che non esiste $b \in B$: $f(a) = b$

② modifica di una associazione : con $a \in A$, $b \in B$ e nell'ipotesi $f(a) \neq \perp$

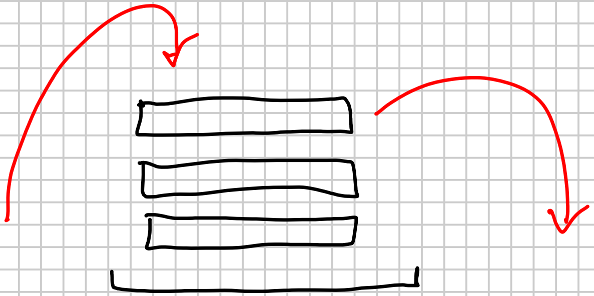
$f\left[{}^{b}/_{a}\right]^{mod}$ è un nuovo frame f': $f'(a) = b$ $f'(x) = f(x)$, per ogni $x \in A$ $x \neq a$

③ aggiunta di una associazione : con $a \in A$, $b \in B$ e nell'ipotesi $f(a) = \perp$

$f\left[{}^{b}/_{a}\right]^{add}$ è un nuovo frame f': $f'(a) = b$ $f'(x) = f(x)$, per ogni $x \in A$ $x \neq a$

PILE (stack) di frame

La pila è una struttura dati di tipo LIFO (Last In First Out)



La pila ci serve per modellare lo stato in un linguaggio <u>A BLOCCHI</u>

F = insieme di tutti i possibili frame $A \to B_\perp$

$$F = \{ f : f : A \to B_\perp \}$$

$$\omega \in F$$

frame <u>vuoto</u> ω

$\omega : A \to B_\perp$ tale che

$\omega(a) = \perp$ per ogni $a \in A$

Π è l'insieme di tutte le pile di frame in F

$\Omega \in \Pi$ è la pila VUOTA
la pila che non contiene
alcun frame

f_1

a_1	10

f_2

b	20
c	10

Una possibile pila è

f_2

b	20
c	10

f_1

a_1	10

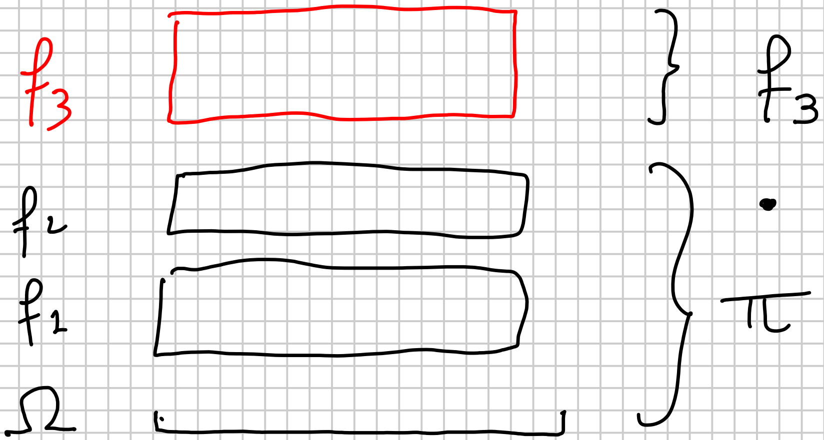
pila costituita da f_2 in "cima"
f_1 "sotto" a f_2

Per rappresentare formalmente l'insieme Π, introduciamo un operatore per "costruire" pile.

E' un operatore INFISSO che, dato un frame f e una pila di frame Π "costruisce" una nuova pila in cui f è il primo frame della pila, "sopra" il resto della pila Π

Dato $f \in F$ e $\pi \in \Pi$

$f \cdot \pi$ è la pila così ottenuta



$A : \text{Nomi}$ $\qquad B : \mathbb{N}$ $\qquad F = \{ f \mid f : \text{Nomi} \to \mathbb{N}_\perp \}$

f_1 :

a_1	10
a_2	20

f_2 :

c	30

f_3 :

d	40

disegno la pila $\qquad f_3 \cdot \Omega$

f_3 :

d	40

$f_1 \cdot (f_3 \cdot \Omega)$

$\cancel{(f_1 \cdot f_3) \cdot \Omega}$

f_1 :

a_1	10
a_2	20

f_3 :

d	40

Ω

Notare che l'ordine é rilevante

$$f_1 \cdot f_3 \cdot \Omega \neq f_3 \cdot f_1 \cdot \Omega$$

$$\cdot : F \times \Pi \to \Pi$$

Titolo nota 12/10/2015

In $(f_1 \cdot (f_2 \cdot \ldots \cdot (f_n \cdot \Omega)\ldots))$ non usiamo le parentesi, ma la convenzione che l'operatore $\cdot$ associa a destra.

$$\Pi = \{\Omega\} \cup \{ f \cdot \pi \mid f \in F,\ \pi \in \Pi \}$$

è una definizione RICORSIVA

Π è definito in termini di sé stesso.

$$\{\Omega,\ f_1 \cdot \Omega,\ f_1 \cdot f_1 \cdot \Omega,\ f_2 \cdot f_1 \cdot \Omega,\ \ldots \}$$

$$\mathbb{P} = \{\emptyset\} \cup \{ n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \mathbb{P} \} \qquad \{\emptyset, 2, 4, 6 \ldots\}$$

Domanda: si può scrivere così?

1) $\mathbb{P}' = \{\emptyset\} \cup \{\underline{n} \mid n \in \mathbb{N} \wedge \underline{n+2 \in \mathbb{P}'}\}$

$\{\emptyset\}$ non definisce l'insieme dei numeri pari, ma definisce l'insieme singoletto $\{\emptyset\}$

2) $\mathbb{P}'' = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge 2n \in \mathbb{P}''\}$ non definisce i numeri pari ma l'insieme singoletto $\{\emptyset\}$

$\{\emptyset\}$

$\{\emptyset\} = \mathbb{P}' = \mathbb{P}''$

Parentesi

$$\mathbb{P}_{\mathbb{Z}} = \{\emptyset\} \cup \{z \mid z \in \mathbb{Z}^+ \wedge z-2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}\} \cup \{z \mid z \in \mathbb{Z}^- \wedge z+2 \in \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}\}$$

$$\{\emptyset, 2, -2, 4, -4, \ldots\ldots\}$$

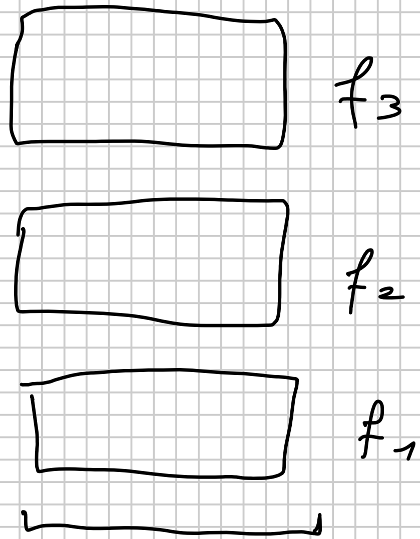
Chiuse parentesi.

$\Pi = \{\Omega\} \cup \{ f \cdot \pi \mid f \in F \wedge \pi \in \Pi \}$ pile di frame $F = \{ f \mid f : A \to B_\perp \}$

1 Ricerca di una associazione in una pila

Sia $\pi \in \Pi$, $a \in A$, $\pi(a)$

$$\pi(a) = \begin{cases} \perp & \text{se } \pi = \Omega \\ f(a) & \text{se } \pi = f \cdot \pi' \wedge f(a) \neq \perp \\ \pi'(a) & \text{se } \pi = f \cdot \pi' \wedge f(a) = \perp \end{cases}$$



$$f_1(x) = \begin{cases} 10 & \text{se } x = a_1 \\ 20 & \text{se } x = a_2 \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 30 & \text{se } x = a_3 \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 50 & \text{se } x = a_1 \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Consideriamo π_1

$$f_3 \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot \Omega$$

$$\pi_1(a_2)$$

$$= \{ \pi_1 = f_3 \cdot (\underbrace{f_2 \cdot f_1 \cdot \Omega}_{\pi'}),\ f_3(a_2) = \perp \}$$

$$(\underbrace{f_2 \cdot f_1 \cdot \Omega}_{\pi'})(a_2)$$

$$= \{ f_2 \cdot \underbrace{f_1 \cdot \Omega} \neq \Omega,\ f_2(a_2) = \perp \}$$

$$(f_1 \cdot \Omega)(a_2)$$

$$= \{ f_1 \cdot \Omega \neq \Omega,\ f_1(a_2) = 20 \}$$

$$20$$

$$\pi(x) = \begin{cases} \perp & \text{se } \pi = \Omega \\ f(x) & \text{se } \pi = f \cdot \pi' \text{ e } f(x) \neq \perp \\ \pi'(x) & \text{se } \pi = f\,\pi' \text{ e } f(x) = \perp \end{cases}$$

a_1	50

a_3	30

a_1	10
a_2	20

Ricerca è una operazione che, data una pila π e un elemento $a \in A$, restituisce un elemento di $B_\perp$

$$\pi(a_1)$$
$$= \begin{cases} \pi = f_3 \cdot f_2 \cdot f_1 \cdot \Omega \neq \Omega, \; f_3(a_1) \neq \perp \end{cases}$$

50

π

a_1	50

a_3	30

a_1	10
a_2	20

Consideriamo la pila $\pi' = f_2 \cdot f_1 \cdot f_3 \cdot \Omega$

$$\pi'(a_1)$$
$$= \{ \pi' \neq \Omega, \; f_2(a_1) = \perp \}$$
$$(f_1 \cdot f_3 \cdot \Omega)(a_1)$$
$$= \{ f_1 \cdot f_3 \cdot \Omega \neq \Omega, \; f_1(a_1) \neq \perp \}$$

10

a_3	30

a_1	10
a_2	20

a_1	50

MODIFICA di UNA ASSOCIAZIONE

Sia $\pi \in \Pi$, siano $a \in A$, $b \in B$

$\pi\left[{}^{b}/_{a}\right]^{mod}$ è la pila che si ottiene modificando la "prima" associazione per a

$$\pi\left[{}^{b}/_{a}\right]^{mod} = \begin{cases} f\left[{}^{b}/_{a}\right]^{mod} \cdot \pi' & \text{se } \pi = f \cdot \pi' \text{ e } \underline{f(a) \neq \perp} \\ f \cdot \pi'\left[{}^{b}/_{a}\right]^{mod} & \text{se } \pi = f \cdot \pi' \text{ e } f(a) = \perp \end{cases}$$

L'operazione non è definita se $\pi(a) = \perp$: è implicito nella definizione

$$\pi\left[\frac{50}{a_1}\right]^{mod}$$

$$= \{\pi = f_1 \cdot \ldots \quad f_1(a_1) \neq \perp\}$$

$$f_1\left[\frac{50}{a_1}\right]^{mod} \cdot f_2 \cdot \Omega$$

f_1

a_1	50 ~~10~~

f_2

a_2	20
a_3	10

$$\pi = f_1 \cdot f_2 \cdot \Omega$$

$$\pi\left[\frac{50}{a_4}\right]^{mod}$$

$$= \{\pi = f_1 \cdot f_2 \cdot \Omega,\ f_1(a_4) = \perp\}$$

$$f_1 \cdot (f_2 \cdot \Omega)\left[\frac{50}{a_4}\right]^{mod}$$

$$= \{f_2(a_4) = \perp\}$$

$$f_1 \cdot \left(f_2 \cdot \Omega\left[\frac{50}{a_4}\right]^{mod}\right)$$

$$= \;??$$

AGGIUNTA di UNA ASSOCIAZIONE

Sia $\pi \in \Pi$, siano $a \in A$, $b \in B$.

$\pi\left[\,{}^{b}\!/\!_{a}\,\right]^{add}$ è la pila che si ottiene aggiungendo una associazione $\langle a, b \rangle$ nel frame in cima alla pila

$$\pi\left[\,{}^{b}\!/\!_{a}\,\right]^{add} = f\left[\,{}^{b}\!/\!_{a}\,\right]^{add} \cdot \pi' \qquad \text{se } \pi = f \cdot \pi'$$

(è un'operazione lecita se $f(a) = \perp$)