PROGRAMMAZIONE RICORSIVA e FUNZIONALE

CAML - LIGHT è una implementazione del linguaggio ML (Meta Language)

RICORSIONE (fondamenti)

$f(x) = 2x - 4 \qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(5) = 2 \cdot 5 - 4 = 6$

$f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$

EQUAZIONE RICORSIVA

$x = f(x)$ esiste un $x \in \mathbb{N}$ tale che x è l'immagine di sé stesso rispetto a f?

$x = 2 \cdot x - 4 \equiv x + 4 = 2 \cdot x \equiv 4 = 2 \cdot x - x \equiv \boxed{4 = x}$

SOLUZIONE di $x = f(x)$
(PUNTO FISSO di f)

$f(x) = x + 1$ $\qquad f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$x = f(x)$ $\qquad x = x + 1$ $\qquad x - x = 1$ $\qquad \boxed{0 = 1}$ impossibile

f NON AMMETTE PUNTI FISSI

$f(x) = x + 6 - 4 - 2$

$x = f(x)$ $\qquad x = x + 6 - 4 - 2$ $\qquad 0 = 6 - 4 - 2$ $\qquad \boxed{0 = 0}$ sempre vero!

f AMMETTE INFINITI PUNTI FISSI

Ogni numero naturale è soluzione di $x = f(x)$

Data una trasformazione

$$T : A \longrightarrow A$$

studiamo sotto quali condizioni la trasformazione ammette PUNTI FISSI, ovvero elementi $x \in A$ tali che $x = T(x)$

Ci limiteremo a studiare trasformazioni di questo tipo quando il dominio della trasformazione è un insieme di insiemi

$$\mathbb{P}_A$$

Dato A, $\mathbb{P}_A$ indica l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A

$\mathbb{P}_A$ è finito se A è finito

$\mathbb{P}_A$ è infinito se A è infinito

Da qui in poi facciamo riferimento a equazioni ricorsive del tipo

$$X = T(X) \quad \text{dove} \quad T : \mathbb{P}_A \longrightarrow \mathbb{P}_A \quad , \text{con } A \text{ fissato}$$

Esempio: $\quad A = \mathbb{N}$

$$\mathcal{T} : \mathbb{P}_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{N}}$$

$$\mathcal{T}(X) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$$

$$\mathcal{T}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \{1,2,3\}\}$$

$$= \{\emptyset\} \cup \{3,4,5\} = \{\emptyset, 3,4,5\}$$

Abbiamo scoperto che $\{1,2,3\}$ NON È punto fisso di $\mathcal{T}$.

Sia P l'insieme dei numeri pari.

$$\mathcal{T}(P) = \{\emptyset\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in P\} = \{\emptyset\} \cup \{2,4,6,\dots\} = P$$

è PUNTO FISSO di $\mathcal{T}$

$$\tau(X) = \{1\} \cup X \qquad \tau : \mathcal{P}_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathcal{P}_{\mathbb{N}}$$

$\tau(\{\underline{1,2,3}\}) = \{1\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\}$ è un punto fisso

$\tau(\{\underline{1,5,8}\}) = \{1\} \cup \{1,5,8\} = \{1,5,8\}$ " " "

$\tau(\{\underline{3,6}\}) = \{1\} \cup \{3,6\} = \{1,3,6\}$ non è un punto fisso

È facile convincersi che, dato un insieme Y tale che $1 \in Y$, Y è punto fisso della trasformazione

$$1 \in Y \Rightarrow \{1\} \cup Y = Y$$

La trasformazione AMMETTE infiniti punti fissi.

Tra tutti i punti fissi, ne esiste uno che è CONTENUTO in tutti gli altri, è il più piccolo di tutti. È l'insieme $\{1\}$: è il MINIMO PUNTO FISSO

$\mathcal{T}(X) = \mathbb{N} \setminus X$ $\quad \setminus$ è l'operazione di COMPLEMENTO

$\mathcal{T}(\{1,2\}) = \{\phi, 3, 4, 5, \ldots\ldots\}$

$\mathcal{T}(\mathbb{N}) = \{\,\}$

$\mathcal{T}(P) = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ con P insieme dei numeri pari

$\mathcal{T}$ NON AMMETTE punti fissi

Possiamo studiare proprietà delle trasformazioni

$$\mathcal{T} : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$$

che ci garantiscano l'esistenza di punti fissi della trasformazione, ovvero soluzioni dell'equazione

$$X = \mathcal{T}(X) \quad ??$$

TEOREMA di RICORSIONE

- Quando esiste un punto fisso di una trasformazione $\tau : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$
- Ci dice anche, quando il punto fisso esiste, come individuarne uno in particolare che possiamo scegliere come LA soluzione canonica dell'equazione

$$X = \tau(X)$$

È il minimo punto fisso, cioè un insieme I tale che

- $I = \tau(I)$
- $\forall J \in \mathbb{P}_A .\ J = \tau(J) \Rightarrow I \subseteq J$ MINIMO PUNTO FISSO

Titolo nota 08/10/2015

CONCETTI PRELIMINARI

Sia $\tau : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$.

- τ si dice **MONOTÓNA** se, presi $X, Y \in \mathbb{P}_A$ con $X \subseteq Y$, allora $\tau(X) \subseteq \tau(Y)$

$\tau(X) = X \cup \{1\}$ è monotóna?

Siano X_1, X_2 con $X_1 \subseteq X_2$

$\tau(X_1)$
$= \{ \text{definizione di } \tau \}$
$X_1 \cup \{1\}$

$\tau(X_2)$
$= \{ \text{def. di } \tau \}$
$X_2 \cup \{1\}$

ma

$$X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1 \cup B \subseteq X_2 \cup B$$ per ogni B, quindi

$\tau(X_1) = X_1 \cup \{1\} \subseteq X_2 \cup \{1\} = \tau(X_2)$ $\quad$ τ è monotóna.

Sia $\tau : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$. τ si dice CONTINUA se

presa una qualunque sequenza NON DECRESCENTE (rispetto a $\subseteq$) di insiemi

$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \ldots \subseteq X_i \subseteq \ldots$ (con $X_i \in \mathbb{P}_A$)

$$\bigcup_{i \geqslant 0} \tau(X_i) = \tau\left(\bigcup_{i \geqslant 0} X_i\right)$$

$$\tau(X_0) \cup \tau(X_1) \cup \ldots\ldots = \tau(X_0 \cup X_1 \cup X_2 \ldots\ldots)$$

Fra poco dimostreremo che se una trasformazione è CONTINUA è anche MONOTONA.

Titolo nota 08/10/2015

$T(X) = X \cup \{1\}$ abbiamo visto che è monotona. E' anche continua ??

Sia $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots$ sequenza non decrescente di insiemi.

$$\bigcup_{i \geq 0} T(X_i)$$

$= \{$ def. di $T \}$

$$\bigcup_{i \geq 0} \left(X_i \cup \{1\} \right)$$

$(X_0 \cup \{1\}) \cup (X_1 \cup \{1\}) \cup (X_2 \cup \{1\}) \cup \dots$

$(X_0 \cup X_1 \cup X_2 \dots) \cup \{1\}$

$= \{$ prop. di $\cup \}$

$$\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i \right) \cup \{1\}$$

$= \{$ def. di $T \}$

$$T\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i \right)$$

E' CONTINUA !!!

Titolo nota 08/10/2015

$$T(X) = \begin{cases} \{\} & \text{se } \# X > 2 \\ \{1\} & \text{se } \# X \leq 2 \end{cases}$$

$T(\{12, 82, 6\}) = \{\}$

$T(\{\}) = \{1\}$ $\quad T(\{2\}) = \{1\}$

$T(\mathbb{N}) = \{\}$

T è monotòna ?? No!! Per dimostrarlo, troviamo X_1, X_2 con $X_1 \subseteq X_2$ e mostriamo che $T(X_1) \not\subseteq T(X_2)$

$$\{12, 86\} \subseteq \{12, 86, 3\}$$

$$\mathcal{T}(\{12, 86\}) = \{1\} \not\subseteq \{\} = \mathcal{T}(\{12, 86, 3\})$$

Titolo nota 08/10/2015

Per dimostrare che una trasformazione è MONOTÓNA, devo dimostrare

$$\left(\forall X_1, X_2 .\ X_1 \in \mathbb{P}_A \wedge X_2 \in \mathbb{P}_A \wedge \underline{\underline{X_1 \subseteq X_2}} \Rightarrow \tau(X_1) \subseteq \tau(X_2) \right)$$

Per dimostrare che <u>non</u> è monotona devo dimostrare

$$\exists X_1, X_2 .\ X_1 \in \mathbb{P}_A \wedge X_2 \in \mathbb{P}_A \wedge X_1 \subseteq X_2 \wedge \tau(X_1) \not\subseteq \tau(X_2)$$

$$\tau(X) = \begin{cases} \{\} & \text{se } X \text{ è finito} \\ \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \end{cases}$$

$\tau(\{\}) = \{\}$

$\tau(\{1,2,3\}) = \{\}$

$\tau(\{n \mid n \le 10\}) = \{\}$

$\tau(P) = \{1\}$ P numeri pari

$\tau(\mathbb{N}) = \{1\}$

τ è monotona, Sì. Dimostriamolo.

$\underline{X_1 \subseteq X_2} \Rightarrow \tau(X_1) \subseteq \tau(X_2)$ per ogni X_1, X_2

Dimostrazione per casi.

1. X_1, X_2 entrambi finiti
   $\tau(X_1) = \tau(X_2) = \{\}$ ✓

2. X_1, X_2 entrambi infiniti
   $\tau(X_1) = \tau(X_2) = \{1\}$ ✓

3. X_1 finito, X_2 infinito
   $\tau(X_1) = \{\} \subseteq \{1\} = \tau(X_2)$ ✓

Titolo nota 08/10/2015

$$\tau(X) = \begin{cases} \{\} & \text{se } X \text{ è finito} \\ \{1\} & \text{se } X \text{ è infinito} \end{cases}$$

NON È CONTINUA

Data una qualunque sequenza $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq$

$$\tau\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) = \bigcup_{i \geq 0} \tau(X_i)$$

def. di CONTINUITÀ

Consideriamo $\underbrace{\{\emptyset\}}_{X_0} \subseteq \underbrace{\{\emptyset, 1\}}_{X_1} \subseteq \underbrace{\{\emptyset, 1, 2\}}_{X_2} \subseteq \dots \subseteq \underbrace{\{\emptyset, 1, 2, \dots, i\}}_{X_i} \subseteq \dots$

$X_i = \{n \mid n \in \mathbb{N} \land n \leq i\}$ è una sequenza non decrescente infinita di insiemi. Ciascun insieme X_i è FINITO

$$\bigcup_{i \geq \emptyset} \tau(X_i) = \bigcup_{i \geq 0} \{\} = \{\} \qquad \tau\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) = \tau(\mathbb{N}) = \{1\}$$

$$\tau\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \neq \bigcup_{i \geq 0} \tau(X_i)$$

NON È CONTINUA

TEOREMA. $\tau : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$. Se τ è continua è anche monotona.

Dimostrazione: devo mostrare che, presi due insiemi X_1, X_2 arbitrari

$$\boxed{X_1 \subseteq X_2} \Rightarrow \boxed{\tau(X_1) \subseteq \tau(X_2)}$$

$*$

$\tau(X_2)$

$=$ { prop. di $\cup$, $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ }

$\tau(X_1 \cup X_2)$

$=$ { τ è continua, $\tau(X_1) \cup \tau(X_2) = \tau(X_1 \cup X_2)$: $\bigcup_{i=1,2} \tau(X_i) = \tau\left(\bigcup_{i=1,2} X_i\right)$ }

$\tau(X_1) \cup \tau(X_2)$

$$\tau(X_2) = \tau(X_1) \cup \tau(X_2) \Longrightarrow \boxed{\tau(X_1) \subseteq \tau(X_2)}$$

$*$

Nelle definizioni di trasformazioni useremo alcune operazioni CONTINUE su insiemi.

<u>TEOREMA</u> : L'unione è una trasformazione CONTINUA.

Sia $Y \in \mathbb{P}_A$. Allora

$$T_Y(X) = X \cup Y \quad \text{è continua}$$

<u>Dimostrazione</u>

Sia $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_i \subseteq \dots$

$$
\begin{aligned}
& T_Y\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \\
= \; & \{\text{def. di } T_Y\} \\
& \left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right) \cup Y \\
= \; & \{\text{prop. di } \cup\} \\
& \bigcup_{i \geq 0} (X_i \cup Y) \\
= \; & \{\text{def. di } T_Y\} \\
& \bigcup_{i \geq 0} T_Y(X_i)
\end{aligned}
$$

è continua