Titolo nota 22/10/2015

GRAMMATICHE COME SISTEMI di EQUAZIONI RICORSIVE

$S \to aAb \mid aSb$
$A \to a \mid aA$

$$\begin{cases} S = \{a\}A\{b\} \cup \{a\}S\{b\} \\ A = \{a\} \cup \{a\}A \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = T_S(A,S) \\ A = T_A(A) \end{cases}$$

Indichiamo con

$S^{\emptyset} = \{\}$ $\qquad S^{i+1} = T_S(A^i, S^i)$

$A^{\emptyset} = \{\}$ $\qquad A^{i+1} = T_A(A^i)$

$$\begin{cases} S^1 = \{a\}\{\}\{b\} \cup \{a\}\{\}\{b\} = \{\} \\ A^1 = \{a\} \cup \{a\}\{\} = \{a\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^2 = \{a\}\{a\}\{b\} \cup \{a\}\{\}\{b\} = \{aab\} \\ A^2 = \{a\} \cup \{a\}\{a\} = \{a, aa\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S^3 = \{a\}\{a,aa\}\{b\} \cup \{a\}\{aab\}\{b\} = \{aab, aaab, aaabb\} \\ A^3 = \{a\} \cup \{a\}\{a,aa\} = \{a, aa, aaa\} \end{cases}$$

$\boxed{\alpha \in L(G)}$ se e soltanto se esiste un $i \geq \emptyset$ tale che

$\alpha \in S^i$

α è frontiera di un albero di derivazione nella grammatica

CARATTERIZZAZIONE di FUNZIONI (RICORSIVE) ATTRAVERSO IL LORO GRAFICO

Titolo nota 22/10/2015

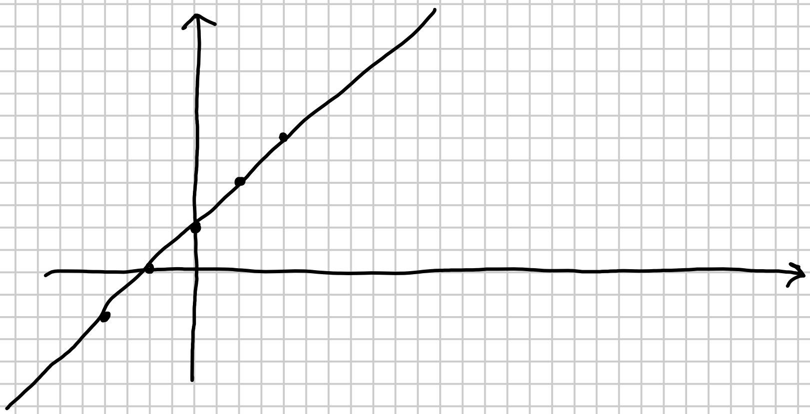
Sia $f : A \to B$. Il GRAFICO di f è il seguente insieme di coppie

$$F = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \wedge b = f(a) \}$$

Esempio

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = x+1$

$F = \{ \langle y, y+1 \rangle \mid y \in \mathbb{R} \}$



$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{B}$

$f(n,m) = (n+m > 3)$

$$F = \{ \langle \underline{(n,m)}, \underline{b} \rangle \mid n+m > 3 \equiv b \}$$

GRAFICO di FUNZIONE RICORSIVA

Titolo nota 22/10/2015

$$fact(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = \emptyset \\ n * fact(n-1) & \text{se } n > \emptyset \end{cases}$$

$fact: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$Fact = \{\langle \emptyset, 1 \rangle\} \cup \{\langle n, n*m \rangle \mid n > \emptyset \wedge \langle n-1, m \rangle \in Fact\}$$

$$X = \mathcal{T}_{fact}(X) \quad \text{dove}$$

$$\mathcal{T}(X) = \{\langle \emptyset, 1 \rangle\} \cup \{\langle n, n*m \rangle \mid n > 0 \wedge \langle n-1, m \rangle \in X\}$$

$\mathcal{T}$ è una trasformazione continua. Il suo MINIMO PUNTO FISSO è il grafico della funzione fact.

Titolo nota 08/10/2015

$$\tau^0(\{\}) = \{\}$$

$$\tau^1(\{\}) = \tau(\tau^0(\{\})) = \tau(\{\}) = \{<\emptyset,1>\} \cup \{<n, n*m> \mid n>\emptyset \wedge <n-1,m> \in \{\}\} = \{<\emptyset,1>\}$$

$$\tau^2(\{\}) = \tau(\{<\emptyset,1>\}) = \{<\emptyset,1>\} \cup \{<n, n*m> \mid n>0 \wedge <n-1,m> \in \{<\emptyset,1>\}\} =$$

$$= \{<\emptyset,1>, <1,1>\}$$

$$\tau^3(\{\}) = \tau(\{<\emptyset,1>,<1,1>\}) = \{<\emptyset,1>\} \cup \{<n,n*m> \mid n>\emptyset \wedge <n-1,m> \in \{<\emptyset,1>,<1,1>\}\} =$$

$$= \{<\emptyset,1>, <1,1>, <2,2>\}$$

$$\tau^4(\{\}) = \tau(\{<\emptyset,1>,<1,1>,<2,2>\}) = \{<\emptyset,1>,<1,1>,<2,2>,<3,6>\}$$

$fact(0) = 1 \quad fact(1) = 1 \quad fact(2) = 2 \quad fact(3) = 6 \quad \dots$

Titolo nota 08/10/2015

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = 1 \\ f(n+1) + 1 & \text{se } n \neq 1 \end{cases}$$

$$F = \{ \langle 1, \emptyset \rangle \} \cup \{ \langle n, m+1 \rangle \mid n \neq 1 \wedge \langle n+1, m \rangle \in F \}$$

$F^i = \tau^i(\{\})$

$$\tau(X) = \{ \langle 1, 0 \rangle \} \cup \{ \langle n, m+1 \rangle \mid n \neq 1 \wedge \langle n+1, m \rangle \in X \}$$

$F^0 = \{\}$

$F^1 = \tau(\{\}) = \{ \langle 1, \emptyset \rangle \}$

$$F^2 = \tau(F^1) = \{ \langle 1, 0 \rangle \} \cup \{ \langle n, m+1 \rangle \mid n \neq 1 \wedge \langle n+1, m \rangle \in F^1 \} =$$
$$= \{ \langle 1, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, 1 \rangle \}$$

$$F^3 = \tau(F^2) = \{ \langle 1, 0 \rangle \} \cup \{ \langle n, m+1 \rangle \mid n \neq 1 \wedge \langle n+1, m \rangle \in F^2 \} = \{ \langle 1, \emptyset \rangle, \langle \emptyset, 1 \rangle \}$$

$F^2 = F^3 = F^k$ è il MINIMO PUNTO FISSO $\quad k \geq 2$

La funzione il cui grafico è $\{<\emptyset,1>, <1,\emptyset>\}$ possiamo descriverla in questo modo

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = \emptyset \\ \emptyset & \text{se } n = 1 \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

f è una funzione PARZIALE dai naturali nei naturali.

Il teorema di ricorsione ci consente di calcolare il grafico delle funzioni ricorsive che definiamo.

Vogliamo però individuare un modo per PROGETTARE funzioni ricorsive ben fatte, totali.

- $f(x) = 1 + f(x+1)$ $\qquad f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$F = \{ \langle n, m+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge \langle n+1, m \rangle \in F \}$$

$$F^0 = \{\ \} \qquad F^1 = \{ \langle n, m+1 \rangle \mid n \in \mathbb{N} \wedge \langle n+1, m \rangle \in \{\ \} \} = \{\ \} \leftarrow \text{MINIMO PUNTO FISSO}$$

La funzione ha un grafico vuoto, cioè

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ \nexists m \in \mathbb{N}.\ m = f(n)$$

- $$fact(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ n * fact(n-1) & \text{se } n \neq 0 \end{cases}$$

$f(3)$	$fact(3)$
$= 1 + f(4)$	$= 3 * fact(2)$
$= 1 + 1 + f(5)$	$= 3 * 2 * fact(1)$
$= 1 + 1 + 1 + f(6)$	$= 3 * 2 * 1 * fact(0)$
$\vdots$	$= 3 * 2 * 1 * 1$
	$= 6$

PRINCIPIO di INDUZIONE BEN FONDATA

Titolo nota 08/10/2015

Si utilizza per progettare funzioni ricorsive "ben fatte"

Il Principio di ind. ben fondata è una generalizzazione del principio di induzione naturale

Sia $P : \mathbb{N} \to \mathbb{B}ool$

$$\boxed{\Big(\underbrace{P(\emptyset)}_{\text{caso base}} \wedge \underbrace{\forall n.\, P(n) \Rightarrow P(n+1)}_{\text{caso induttivo}} \Big) \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N}.\, P(n)}$$

$$due(n) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } n = \emptyset \\ 2 + due(n-1) & \text{se } n \neq \emptyset \end{cases} \qquad due : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

Intuitivamente: $\forall n \in \mathbb{N}.\ due(n) = 2 \cdot n$ $\qquad \forall n \in \mathbb{N}.\, P(n)$

Proviamo a dimostrarlo utilizzando il P.D.I. $P(n) \equiv \mathrm{due}(n) = 2 \cdot n$

$P(0)$ $\quad \mathrm{due}(0) = 2 \cdot 0$ caso base

$\mathrm{due}(0)$

$= \{1^a \text{ clausola def. due}\}$

0

$= \{\text{calcolo}\}$

$2 \cdot 0$

caso induttivo : $\underbrace{P(n)}_{\text{Ip. induttiva}} \Rightarrow P(n+1)$

$\overbrace{\mathrm{due}(n) = 2 \cdot n} \Rightarrow \mathrm{due}(n+1) = 2 \cdot (n+1)$

$\mathrm{due}(n+1)$

$= \{2^a \text{ clausola def. due}\}$

$2 + \mathrm{due}(n+1-1)$

$= \{\text{calcolo}\}$

$2 + \underline{\mathrm{due}(n)}$

$= \{\text{Ip. induttiva} : \mathrm{due}(n) = 2 \cdot n\}$

$2 + \underline{2 \cdot n}$

$= \{\text{calcolo}\}$

$2 \cdot (n+1)$

$$sum(n,m) = \begin{cases} m & se \quad n=\emptyset \\ 1 + sum(n-1,m) & se \quad n \neq \emptyset \end{cases}$$

$$sum : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$\boxed{\forall n,m. \quad sum(n,m) = n+m}$$

Caso base

$$sum(\emptyset, m) = \emptyset + m$$

Caso induttivo

$$sum(n,m) = n+m$$

$$\Rightarrow$$

$$sum(n+1, m) = (n+1) + m$$

$$\begin{aligned} & sum(3,4) \\ = \; & 1 + sum(2,4) \\ = \; & 1 + 1 + sum(1,4) \\ = \; & 1 + 1 + 1 + sum(\emptyset,4) \\ = \; & 1 + 1 + 1 + 4 \\ = \; & 7 \end{aligned}$$

$sum(\emptyset, m)$

$= \{ 1^a \text{ clausola def. sum} \}$

m

$=$

$\emptyset + m$

$sum(n+1, m)$

$= \{ 2^\circ \text{ clausola def. sum} \}$

$1 + sum(n+1-1, m)$

$= \{ \text{calcolo} \}$

$1 + \underline{sum(n, m)}$

$= \{ \text{Ip. induttiva}: sum(n,m) = n+m \}$

$1 + \underline{n+m}$

$= \{ \text{prop. associativa} + \}$

$(n+1) + m$ c.v.d.

PRINCIPIO di INDUZIONE BEN FONDATA

Titolo nota 08/10/2015

Relazione di precedenza su un insieme A

è una relazione su A, cioè un insieme di coppie in $A \times A$

$$R \subseteq A \times A$$

Quando $(a,b) \in R$ spesso scriviamo $a R b$

Esempio : $<$ sui numeri

$x < y$

$$< = \{ (0,1), (0,2), (1,3), (1,8), (127, 242), \dots \}$$

$127 < 242$

Useremo $<, \prec, \sqsubset, \ll$

$a \sqsubset b$ per indicare $(a,b) \in \sqsubset$

INSIEME BEN FONDATO

Titolo nota 08/10/2015

$(A, \sqsubset)$ l'insieme A si dice **BEN FONDATO** rispetto a $\sqsubset$ se e solo se non esiste in A una sequenza decrescente infinita rispetto alla relazione $\sqsubset$

cioè non esistono $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$

$$\dots\dots \sqsubset a_3 \sqsubset a_2 \sqsubset a_1$$

Quando $a \sqsubset b$ diciamo che
a *precede* b
a *è un predecessore immediato* di b
b *è successore* di a
(secondo $\sqsubset$)

$(\mathbb{N}, <)$ è un insieme ben fondato

$(\mathbb{Z}, <)$ NON è ben fondato

$\ldots\ldots -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3$

$0 \sqsubset 1 \sqsubset 2 \sqsubset 3 \sqsubset 4 \sqsubset 5 \sqsubset \ldots$

$-1 \sqsubset -2 \sqsubset -3 \sqsubset -4 \sqsubset -5$

Definiamo la seguente relazione su $\mathbb{Z}$

$$\forall n, m \in \mathbb{Z}. \quad n \sqsubset m \equiv (n \geq 0 \wedge m = n+1) \vee (n < 0 \wedge m = n-1)$$

$0 \sqsubset 1$

$1 \sqsubset 2$

$2 \sqsubset 3$

$-3 \sqsubset -4$

$-4 \sqsubset -5$

$-5 \sqsubset -6$

$-2 \sqsubset -3$

$-1 \sqsubset -2$

$(\mathbb{Z}, \sqsubset)$ è ben fondato

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA di RELAZIONI DI PRECEDENZA

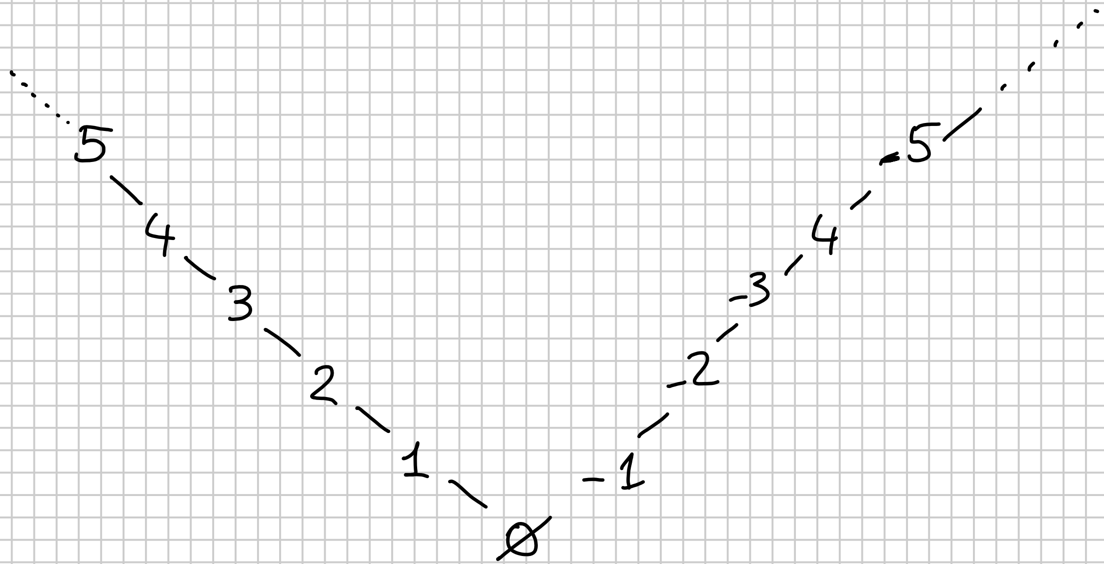
Titolo nota 08/10/2015

Diagrammi

tutte le volte che $a \sqsubset b$

b
|
a

$(\mathbb{Z}, \sqsubset)$



La relazione è ben fondata se non riusciamo a percorrere un cammino verso il basso all'infinito.

$(\mathbb{N}, \sqsubset)$ $\qquad \forall n,m.\ \ n \sqsubset m \equiv n = m+1$

non è ben fondato

$$\begin{array}{c} \emptyset \\ | \\ 1 \\ | \\ 2 \\ | \\ 3 \\ | \\ 4 \\ | \\ \vdots \end{array}$$

Titolo nota 08/10/2015

Sia $(A, \sqsubset)$ un insieme ben fondato. Sia $P : A \longrightarrow \mathbb{B}ool$

1. Se dimostriamo che $P(a)$ è vero per tutti gli elementi di A che non hanno predecessori rispetto a $\sqsubset$ (elementi minimali)

2. Se dimostriamo anche che $P(a)$ vale (per a non minimale) nell' ipotesi che P valga su tutti i predecessori di a

$$\Downarrow$$

$$\left(\forall a \in A .\ P(a) \right)$$

$(\mathbb{N}, \prec)$

$n \prec m \equiv n = m-2$

$$\begin{array}{cc}
\vdots & \vdots \\
| & | \\
8 & 9 \\
| & | \\
6 & 7 \\
| & | \\
4 & 5 \\
| & | \\
2 & 3 \\
| & | \\
\boxed{0} & \boxed{1}
\end{array}$$

sono minimali

Sia P un asserto sui numeri naturali

1. dimostrare $P(0)$;
   dimostrare $P(1)$
2. dimostrare

$$P(n-2) \Rightarrow P(n)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\, P(n)$$