2 Progetto e realizzazione di funzioni ricorsive

Il procedimento costruttivo dato dal teorema di ricorsione suggerisce due fatti importanti. Una buona definizione ricorsiva deve essere tale da garantire che

- la funzione sia immediatamente definita su alcuni casi semplici ($n = 0$ nel caso della funzione fattoriale), i cosiddetti *casi base* della definizione;
- per tutti gli altri argomenti (non base) il calcolo della funzione deve poter essere ricondotto al calcolo della funzione medesima su argomenti "più semplici" (ad esempio $n-1$ nel caso della funzione fattoriale).

Detto informalmente, il primo fatto garantisce che, nel calcolo della prima approssimazione del minimo punto fisso non si riottenga l'insieme vuoto; il secondo fatto garantisce che, ad ogni approssimazione successiva, è possibile ricondurre la costruzione al calcolo di valori della funzione su argomenti per i quali è già noto il valore della funzione stessa. Si noti come la funzione f dell'esempio (1.8), che abbiamo visto essere indefinita su tutti gli argomenti diversi da 0 e 1, non rispetti il secondo requisito.

Scopo di questa sezione è formalizzare questi concetti intuitivi tramite il *principio di induzione ben fondata*.

2.1 Relazioni di precedenza e insiemi ben fondati

Il primo problema da affrontare è dare sostanza ai concetti di *caso base* e *argomento più semplice* introdotti sopra in modo informale. A questo scopo utilizziamo la nozione di insieme ben fondato che si basa, a sua volta, sul concetto di relazione di precedenza ben fondata.

Definizione 2.1. (Relazione di precedenza)
Sia S un insieme. Una *relazione di precedenza* $\mathcal{R}$ su S è una relazione binaria su S, vale a dire un insieme di coppie di elementi di S. Formalmente, $\mathcal{R} \subseteq S \times S$.

Data una relazione di precedenza $\mathcal{R}$, useremo la usuale notazione infissa $x\mathcal{R}y$ per rappresentare l'appartenenza della coppia (x, y) alla relazione medesima e diremo spesso che "*x precede y*" secondo $\mathcal{R}$. Scriveremo inoltre $x \not\mathcal{R} y$ ad indicare che la coppia (x, y) non appartiene alla relazione $\mathcal{R}$ e diremo in questo caso che "*x non precede y*" Inoltre faremo spesso uso di simboli quali $\prec, \preceq, \sqsubset, \ldots$ per denotare relazioni di precedenza.

In alcuni casi avremo bisogno di considerare la *chiusura transitiva* di una relazione di precedenza, definita come segue.

Definizione 2.2. (Chiusura transitiva)
Sia $\mathcal{R}$ una relazione di precedenza su S. La sua *chiusura transitiva* $\mathcal{R}^+$ è la più piccola relazione binaria su S che contiene $\mathcal{R}$ e che gode della proprietà transitiva, ovvero:

(a) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}^+$

(b) se $x\mathcal{R}^+y$ e $y\mathcal{R}^+z$ allora $x\mathcal{R}^+z$

Terminologia
Sia $\prec$ una relazione di precedenza su un insieme S. Allora un elemento $x \in S$ si dice *minimale* (rispetto a $\prec$) se non esiste $y \in S$ tale che $y \prec x$.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 2.1. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e sia $\prec$ la relazione così definita

$$x \prec y \text{ se e solo se } x = y - 1$$

Quindi, ad esempio, $2 \prec 3$, $3 \prec 4$, ma $2 \not\prec 4$. È facile osservare che 0 è minimale rispetto a $\prec$. Si noti poi che la chiusura transitiva della relazione $\prec$ non è altro che l'usuale relazione di "minore" tra numeri naturali definita formalmente da $x < y \equiv (\exists k \neq 0 . y = x + k)$.

Un altro esempio di relazione di precedenza su $\mathbb{N}$ è il seguente:

$$x \sqsubset y \equiv x \neq y \wedge divide(x, y)$$

dove $divide(x, y)$ esprime il fatto che x è un divisore di y. Quindi, ad esempio, $2 \sqsubset 16$, $3 \sqsubset 9$, e così via. Si noti che gli elementi minimali rispetto a $\sqsubset$ sono 0 e 1. Inoltre, la chiusura transitiva di $\sqsubset$ coincide con $\sqsubset$ stessa. Siano infatti $x, y, z \in \mathbb{N}$ tali che $divide(x, y)$ e $divide(y, z)$, ovvero $y = k \cdot x$ e $z = h \cdot y$, per qualche $h, k \neq 0$. Dunque $z = h \cdot k \cdot x$, ovvero $divide(x, z)$ e dunque $x \sqsubset z$. ■

Definizione 2.3. (Relazione ben fondata)
Una relazione di precedenza $\prec$ su un insieme S si dice *ben fondata* se e solo se non esiste una catena decrescente infinita

$$a_0 \succ a_1 \succ a_2 \succ \ldots$$

di elementi $a_i \in S$.

Nel seguito, dato un insieme S e una relazione binaria $\prec$ su S diremo che $(S, \prec)$ è un insieme ben fondato (risp. non è un insieme ben fondato) se la relazione $\prec$ è ben fondata (risp. non è ben fondata).

Esempio 2.2. Consideriamo $(\mathbb{N}, \prec)$ con $\prec$ definita come nell'Esempio 2.1. Chiaramente $(\mathbb{N}, \prec)$ è ben fondato, poiché ogni catena descrescente termina al più con 0. Lo stesso dicasi per l'insieme $(\mathbb{N}, \sqsubset)$ dello stesso esempio (perché?).
Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi e la relazione di precedenza $\prec$ definita, come nel caso dei numeri naturali, da

$$x \prec y \text{ se e solo se } x = y - 1$$

È evidente che $(\mathbb{Z}, \prec)$ non è ben fondato. La seguente è, ad esempio, una catena decrescente infinita

$$2 \succ 1 \succ 0 \succ -1 \succ -2 \succ \ldots$$

È invece ben fondato l'insieme $(\mathbb{Z}, \ll)$ dove $\ll$ è definita da

$$x \ll y \equiv (y \in \mathbb{Z}^+ \wedge x = y - 1) \vee (y \in \mathbb{Z}^- \wedge x = y + 1)$$

in cui $\mathbb{Z}^+$ e $\mathbb{Z}^-$ indicano, rispettivamente, l'insieme degli interi positivi e negativi. Come nel caso di $(\mathbb{N}, \prec)$ è facile convincersi che anche in questo caso ogni catena decrescente termina al più con 0 (che è anche l'unico elemento minimale di $\mathbb{Z}$ rispetto a $\ll$). ■

Come messo in luce dagli esempi precedenti, la "ben fondatezza" o meno di un insieme dipende dalla relazione scelta (per **esercizio** invitiamo il lettore a definire una relazione di precedenza non banale $\rhd$ su $\mathbb{N}$ in modo che $(\mathbb{N}, \rhd)$ non sia ben fondato). Né il fatto che esistano elementi minimali rispetto ad una relazione di precedenza è condizione sufficiente per garantire la ben fondatezza della medesima.

Un'ultima osservazione riguarda il fatto che, data una relazione $\preceq$ su un insieme S, se $\preceq$ non è antiriflessiva, allora sicuramente $(S, \preceq)$ non è ben fondato[4]. Preso infatti un elemento $a \in S$ tale che $a \preceq a$, quella che segue è una catena decrescente infinita

$$a \succeq a \succeq a \succeq a \dots$$

2.2 Rappresentazione grafica di relazioni di precedenza

In questa sezione mostriamo un'utile rappresentazione grafica di una relazione di precedenza, che si ottiene tracciando un *diagramma* della relazione medesima, in cui si rappresenta con

$$\begin{tikzcd} y \arrow[d] \\ x \end{tikzcd}$$

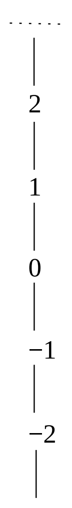
il fatto che "x precede y", ovvero che la coppia (x, y) appartiene alla relazione data.

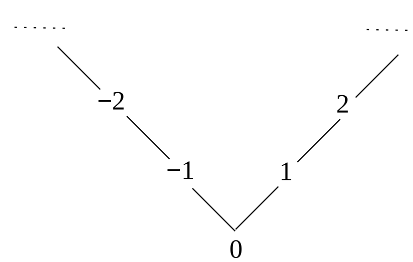
Laddove ciò non crei ambiguità, per comodità faremo uso di linee semplici anziché di frecce

$$\begin{tikzcd} y \arrow[d, no head] \\ x \end{tikzcd}$$

tracciando il "predecessore" x *sotto* il suo "successore" y. Vediamo qualche esempio.

Esempio 2.3. I diagrammi degli insiemi $(\mathbb{Z}, \prec)$ e $(\mathbb{Z}, \ll)$ dell'esempio 2.2 sono i seguenti.





[4]Ricordiamo che una relazione R su un insieme S è antiriflessiva se nessun elemento in S è in relazione R con sé stesso.

La rappresentazione mediante diagrammi consente spesso di verificare facilmente la ben fondatezza o meno di un insieme: nell'esempio si vede chiaramente che nel primo caso $(\mathbb{Z}, \prec)$ non è ben fondato, mentre lo è $(\mathbb{Z}, \ll)$ nel secondo caso. ■

Nel seguito, data una relazione di precedenza $\prec$ su un insieme S, ci accontenteremo di tracciarne il diagramma per verificare la ben fondatezza o meno di $(S, \prec)$. Nonostante tale rappresentazione non possa necessariamente essere esaustiva nel caso di insiemi infiniti, l'utilizzo di opportune astrazioni e semplificazioni ci consente di ottenere diagrammi che, seppure parziali, sono sufficienti per convincerci della ben fondatezza o meno della relazione.

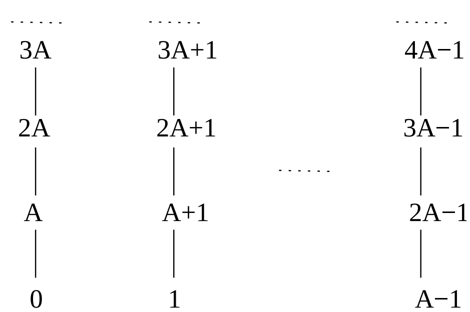
Inoltre, la rappresentazione grafica di una relazione $\prec$ costituisce, ai fini della verifica di ben fondatezza o meno, una buona rappresentazione anche della sua chiusura transitiva $\prec^+$, sebbene non siano esplicitamente rappresentate le coppie $x \prec^+ y$ tali che $x \not\prec y$. È infatti facile convincersi che, se $x \prec^+ y$ è comunque possibile seguire, nel diagramma di $\prec$, un percorso da x a y seguendo gli archi del diagramma.

Vediamo qualche esempio.

Esempio 2.4. Sia $\sqsubset$ la relazione di precedenza definita su $\mathbb{N}$ come segue:

$$n \sqsubset m \text{ se e solo se } m = n + A$$

dove A è un numero naturale non nullo. La rappresentazione grafica è la seguente



dalla quale è facile convincersi che $(\mathbb{N}, \sqsubset)$ è ben fondato. Si noti come il diagramma rappresenti anche la chiusura transitiva $\sqsubset^+$ di $\sqsubset$, definita da

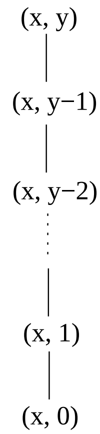
$$n \sqsubset^+ m \text{ se e solo se } \exists k > 0. m = n + k \cdot A.$$

mettendone in evidenza la ben fondatezza.

Consideriamo ora l'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ delle coppie di numeri naturali e la relazione binaria così definita

$$(n, m) \prec (x, y) \text{ se e solo se } n = x \ \wedge \ m = y - 1$$

A partire da un generico elemento (x, y) di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tracciamo la catena decrescente che ha origine in (x, y).



Anche in questo caso la rappresentazione grafica ci è sufficiente per stabilire che la relazione definita è ben fondata su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ■

2.3 Il principio di induzione ben fondata

Abbiamo finalmente tutti gli strumenti per enunciare il *principio di induzione ben fondata.* Dato un insieme S, indichiamo con $\varphi(x)$ una proprietà in cui x denota un generico elemento di S.

Definizione 2.4. (Principio di induzione ben fondata)
Sia $(S, \prec)$ un insieme ben fondato e sia $\varphi(x)$ una proprietà su S. Vale allora il seguente asserto:

$$\begin{gathered}\big(\forall x \in S.\ (\forall y \in S.\ y \prec x \Rightarrow \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)\big) \\ \Rightarrow \\ \big(\forall z \in S.\ \varphi(z)\big)\end{gathered}$$

Diamo una lettura informale del principio sopra enunciato:

> “se $\varphi(x)$ è conseguenza del fatto che $\varphi(y)$ vale per tutti gli elementi $y \prec x$
> allora la proprietà $\varphi(\cdot)$ vale per qualunque elemento di S”.

Il principio sopra enunciato ci suggerisce che, per dimostrare che un asserto $\varphi(\cdot)$ vale su tutti gli elementi di un insieme ben fondato, è sufficiente dimostrare che l'asserto vale su un generico elemento x dell'insieme, nell'*ipotesi* che $\varphi(\cdot)$ valga su ogni elemento y che precede x nella relazione di precedenza scelta (che, lo ricordiamo, deve essere ben fondata).

Fissato x, la formula
$(\forall y \in S.\ y \prec x \Rightarrow \varphi(y))$
viene detta *ipotesi induttiva* rispetto a x.

Osserviamo ora che, se scegliamo $\overline{x}$ elemento *minimale* rispetto a $\prec$, l'ipotesi induttiva si riduce a *true* e non può essere di aiuto nella dimostrazione di $\varphi(\overline{x})$: dobbiamo quindi essere in grado di dimostrare direttamente $\varphi(\overline{x})$ per tutti gli elementi minimali in $(S, \prec)$.

In pratica, la dimostrazione per induzione ben fondata di un asserto del tipo $\forall x \in S.\varphi(x)$ consiste nei seguenti passi:

(i) Si sceglie una relazione di precedenza $\prec$ su S in modo che $(S, \prec)$ sia ben fondato

(ii) Si dimostra che $\varphi(x)$ vale per tutti gli elementi *minimali* rispetto a $\prec$

(iii) detto x un generico elemento di S *non minimale* rispetto a $\prec$, si dimostra che $\varphi(x)$ vale nell'ipotesi che valga $\varphi(y)$ *per ogni* y che precede x nella relazione $\prec$.

Il passo (ii) viene comunemente detto **caso base** e il passo (iii) **caso induttivo** della dimostrazione.

Prima di vedere alcuni esempi d'uso del principio di induzione ben fondata, ne diamo una dimostrazione informale. Sia dunque $(S, \prec)$ un insieme ben fondato e sia $\varphi(\cdot)$ una proprietà sugli elementi di S. Supponiamo che:

(1) $\varphi(\overline{x})$ valga per ogni elemento $\overline{x}$ minimale rispetto a $\prec$

(2) preso un generico $x \in S$, con x non minimale, valga l'asserto

$$\forall y \in S.\ y \prec x \Rightarrow \varphi(y)$$

Supponiamo ora per assurdo che esista $a_1 \in S$ per cui vale $\neg\varphi(a_1)$. Chiaramente, come conseguenza di (1), a_1 non è minimale, e dunque esiste $a_2 \in S$ con $a_2 \prec a_1$ tale che $\neg\varphi(a_2)$. Infatti, se così non fosse, (2) garantirebbe che vale $\varphi(a_1)$ contraddicendo la nostra ipotesi $\neg\varphi(a_1)$. Allo stesso modo, a_2 non è minimale ed esiste $a_3 \in S$ con $a_3 \prec a_2$ tale che $\neg\varphi(a_3)$. Iterando il ragionamento, andiamo a costruire una catena di elementi di S

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 \succ \ldots$$

decrescente infinita, contraddicendo l'ipotesi di ben fondatezza di $(S, \prec)$.

2.4 Dimostrazione di proprietà di definizioni ricorsive mediante induzione ben fondata

Il principio di induzione ben fondata può essere utile per dimostrare interessanti proprietà di definizioni ricorsive.

Funzioni totali

Come ricordato in precedenza, siamo interessati alla definizione di funzioni totali, cioè che calcolino un risultato per qualunque valore del proprio dominio. Data una funzione $f : A \longrightarrow B$, siamo cioè interessati a dimostrare, per induzione ben fondata, che vale un asserto del tipo

$$\forall x \in A.\ \big(\exists y \in B. y = f(x)\big)$$

Si tratta dunque di un asserto del tipo

$$\forall x \in A.\ P(x)$$

che ben si presta ad essere dimostrato per induzione ben fondata. A tale scopo dobbiamo:

(i) individuare una relazione ben fondata $\prec$ su A

(ii) dimostrare che esiste $b_a \in B$ tale che $b_a = f(a)$, per ogni elemento $a \in A$ minimale rispetto a $\prec$

(iii) dimostrare che esiste $b_x \in B$ tale che $b_x = f(x)$, per un *generico* elemento $x \in A$ non minimale rispetto a $\prec$, **nell'ipotesi** che per ogni $y \prec x$ esista $b_y \in B$ tale che $b_y = f(y)$.

Correttezza di funzioni

Per convincersi che una definizione ricorsiva di funzione risolva correttamente il problema per la quale è stata progettata, è spesso necessario ricorrere ad una dimostrazione formale per induzione ben fondata analoga al caso precedente. In questo caso, la dimostrazione relativa ai punti (ii) e (iii) deve essere tale da garantire non solo l'esistenza di elementi del codominio B (quelli indicati con b_a in (ii) e b_x in (iii)), ma anche il fatto che siano gli elementi desiderati. Si noti che una dimostrazione di correttezza così formulata è anche una dimostrazione di totalità della funzione in esame.

È molto comune chiamare **caso base** e **caso induttivo** rispettivamente la parte (ii) e la parte (iii) della dimostrazione.

Illustriamo quanto detto con alcuni esempi.

Esempio 2.5. Consideriamo la seguente definizione ricorsiva di funzione: $f : \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$

$$pari(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ pari(n-2) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Vogliamo dimostrare che vale il seguente asserto

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ pari(n) = n\ mod\ 2$$

dove $a\ mod\ b$ indica il resto della divisione intera tra a e b.
Scegliamo l'usuale relazione di $<$ tra numeri naturali che sappiamo essere una relazione ben fondata, il cui unico elemento minimale è 0.

Caso base.

$$\begin{array}{lll} & pari(0) & \\ = & & \{\text{ definizione di } pari\text{, primo caso }\} \\ & 0 & \\ = & & \{\text{ definizione di } mod\ \} \\ & 0\ mod\ 2 & \end{array}$$

Caso induttivo. Consideriamo un generico $n \in \mathbb{N}$ non minimale, ovvero $n \neq 0$ e consideriamo vera la seguente **ipotesi induttiva**

$$\forall m < n.\ pari(m) = m\ mod\ 2$$

È evidente che, data la definizione di *pari*, dobbiamo procedere *per casi*, distinguendo il caso $n = 1$ da tutti gli altri.

Primo caso induttivo $n = 1$

$$\begin{array}{lll} & pari(1) & \\ = & & \{\text{ definizione di } pari\text{, secondo caso }\} \\ & 1 & \\ = & & \{\text{ definizione di } mod\ \} \\ & 1\ mod\ 2 & \end{array}$$

Secondo caso induttivo $n \neq 1$

$$\begin{array}{ll} & pari(n) \\ = & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } pari\text{, terzo caso } \} \\ & pari(n-2) \\ = & \qquad\qquad \{ \text{ Ipotesi induttiva, poiché } n-2 < n \ \} \\ & (n-2)\ mod\ 2 \\ = & \qquad\qquad \{ \text{ proprietà di } mod \ \} \\ & n\ mod\ 2 \end{array}$$

Dunque, la funzione *pari* calcola il valore 0 se il suo argomento è un numero naturale pari; calcola invece il valore 1 se il suo argomento è dispari. ■

Esempio 2.6. Consideriamo ora la funzione $sum : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ così definita:

$$somma(n, m) = \begin{cases} n & \text{se } m = 0 \\ 1 + somma(n, m-1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e dimostriamo per induzione ben fondata la seguente proprietà:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}. somma(n, m) = n + m$$

A questo scopo, scegliamo la relazione di precedenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dell'esempio 2.4 che riportiamo di seguito per comodità

$$(n, m) \prec (x, y) \text{ se e solo se } n = x \ \wedge \ m = y - 1$$

Abbiamo già osservato che $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \prec)$ è ben fondato e che gli elementi minimali rispetto a $\prec$ sono tutte e sole le (infinite) coppie del tipo $(n, 0)$. Procediamo allora per induzione ben fondata.

Caso base.

$$\begin{array}{ll} & somma(n, 0) \\ = & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } somma\text{, primo caso } \} \\ & n \\ = & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } + \ \} \\ & n + 0 \end{array}$$

Caso induttivo. Sia (n, m) una generica coppia non minimale, ovvero con $m \neq 0$. Possiamo fare uso, nella dimostrazione della seguente *ipotesi induttiva*:

$$\forall x, y \in \mathbb{N}.(x, y) \prec (n, m) \Rightarrow somma(x, y) = x + y.$$

$$\begin{array}{ll} & somma(n, m) \\ = & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } somma\text{, secondo caso } \} \\ & 1 + somma(n, m-1) \\ = & \qquad\qquad \{ \text{ Ipotesi induttiva, poiché } (n, m-1) \prec (n, m) \ \} \\ & 1 + (n + m - 1) \\ = & \qquad\qquad \{ \text{ calcolo } \} \\ & n + m \end{array}$$

Osserviamo ancora che le dimostrazioni dei due esempi precedenti mostrano anche che le funzioni in esame sono funzioni totali sul proprio dominio.

La differenza principale tra la dimostrazione dell'esempio 2.5 e quella dell'esempio 2.6 è che nella seconda la relazione di precedenza considerata fa sì che i casi base corrispondano esattamente ai casi in cui la funzione è definita in modo immediato, mentre nella prima ciò non succede ($pari(1)$ è definita in modo immediato ma 1 non è minimale nella relazione scelta). In generale, nella dimostrazione di proprietà di funzioni ricorsive è conveniente utilizzare una relazione di precedenza sul dominio della funzione che rifletta in modo naturale la struttura della definizione stessa della funzione, così che i casi base e induttivo della dimostrazione corrispondano in maniera diretta alle varie alternative nella definizione della struttura. Ciò rende più semplice e soprattutto meno soggetta ad errori od omissioni la dimostrazione. Il problema è, allora, determinare una relazione di precedenza che rispecchi la definizione della funzione, come vediamo nella prossima sezione.

2.5 Relazione di precedenza indotta

Le considerazioini fatte e gli esempi visti mettono in luce il fatto che una buona definizione ricorsiva di funzione deve essere tale che:

(i) su alcuni argomenti il calcolo della funzione sia definito in modo immediato

(ii) sui restanti argomenti il calcolo della funzione possa essere ricondotto al calcolo della funzione stessa ma su argomenti "più semplici".

Grazie all'apparato formale della sezione 2.3 possiamo ora dire che un argomento è "più semplice" di un altro se il primo precede il secondo rispetto ad una relazione di precedenza sul dominio della funzione.

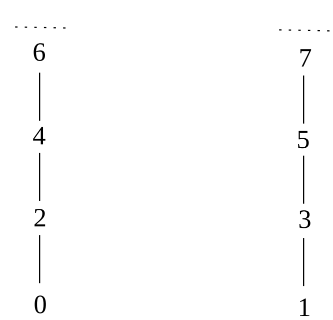
Definizione 2.5. Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione definita in modo ricorsivo. La relazione di precedenza $\prec_f$ *indotta su* A dalla definizione di f è definita come segue:

per ogni $x, y \in A$ $x \prec_f y$ se e solo se $f(y)$ è definita in termini di $f(x)$.

Esempio 2.7. Consideriamo la definizione della funzione *pari* nell'esempio 2.5. La relazione $\prec_{pari}$ indotta da tale definizione è la seguente:

$$x \prec_{pari} y \text{ se e solo se } y \neq 0 \wedge y \neq 1 \wedge x = y - 2$$

Le condizioni $y \neq 0$ e $y \neq 1$ riflettono il fatto che solo in quei casi la definizione di $f(y)$ è espressa in termini di $f(x)$. Si noti tuttavia che tali condizioni possono essere omesse, in quanto $y - 2 \in \mathbb{N}$ se e soltanto se $y \geq 2$, ovvero se e soltanto se $y \neq 0 \wedge y \neq 1$. Tracciamo il diagramma della relazione così definita.



La relazione è chiaramente ben fondata. Inoltre gli elementi minimali coincidono con quelli sui quali la funzione è definita in modo immediato. L'utilizzo di $\prec_{pari}$ nella dimostrazione per induzione ben fondata dell'asserto

$$\forall n \in \mathbb{N}.\ pari(n) = n\ mod\ 2$$

ci guida a considerare come casi base proprio quelli per cui la funzione è definita in modo immediato e come caso induttivo quello per cui la funzione è definita in modo ricorsivo. I dettagli della dimostrazione sono lasciati per **esercizio**. ■

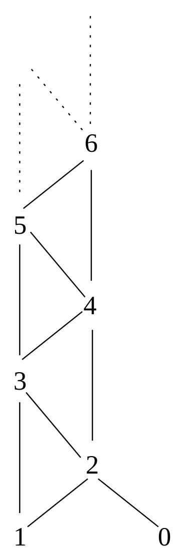
Esempio 2.8. Consideriamo una funzione $fib : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ per il calcolo dei numeri di Fibonacci introdotti nella Sezione 1:

$$fib(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La relazione di precedenza $\prec_{fib}$ indotta da tale definizione è la seguente:

$$m \prec_{fib} n \text{ se e solo se } n \neq 0 \wedge n \neq 1 \wedge (m = n-1 \vee m = n-2)$$

Si noti che ciascun elemento non minimale ha due predecessori nella relazione di precedenza, il cui diagramma può essere rappresentato come segue



Anche in questo caso il diagramma evidenzia la ben fondatezza di $(\mathbb{N}, \prec_{fib})$. ■

Vediamo ora un esempio di funzione non totale.

Esempio 2.9. Sia $foo : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la funzione così definita

$$foo(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 + foo(n+1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

La relazione di precedenza $\prec_{foo}$ indotta è la seguente:

$$m \prec_{foo} n \text{ se e solo se } n \neq 0 \wedge m = n+1$$

Si noti che ciascun elemento non minimale ha due predecessori nella relazione di precedenza, il cui diagramma può essere rappresentato come segue:

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 \arrow[d, dash] & 0 \\
2 \arrow[d, dash] & \\
3 \arrow[d, dash] & \\
4 \arrow[d, dotted, dash] & \\
 &
\end{tikzcd}
$$

Il diagramma mostra chiaramente che $\prec_{foo}$ non è ben fondato. ■

Tutti gli esempi visti finora mostrano che, nel diagramma corrispondente alla relazione indotta dalla definizione ricorsiva di una funzione f, le catene che si ottengono percorrendo (in tutti i possibili modi) il diagramma medesimo dall'alto verso il basso a partire da un generico elemento x del dominio, consentono di "visitare" tutti e soli gli elementi del dominio stesso su cui deve essere calcolato (ricorsivamente) il valore della funzione f per ottenere il valore di $f(x)$. Di qui la necessità che la relazione indotta sia ben fondata affinchè il calcolo abbia termine.

Esempio 2.10. Consideriamo la funzione *pari* dell'esempio 2.5 e calcoliamo il valore della funzione sull'elemento 6.

$$
\begin{array}{lll}
 & pari(6) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } pari\text{, terzo caso } \} \\
 & pari(4) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } pari\text{, terzo caso } \} \\
 & pari(2) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } pari\text{, terzo caso } \} \\
 & pari(0) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } pari\text{, primo caso } \} \\
 & 0 &
\end{array}
$$

Gli elementi utilizzati nel calcolo sono proprio quelli che si incontrano percorrendo il diagramma dell'esempio 2.7 dall'alto verso il basso a partire da 6.

Come ulteriore esempio, consideriamo il calcolo di $fib(4)$ utilizzando la definizione dell'esempio 2.8.

$$
\begin{array}{lll}
 & fib(4) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } fib\text{, terzo caso } \} \\
 & fib(3) + fib(2) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } fib\text{, terzo caso (2 volte) } \} \\
 & fib(2) + fib(1) + fib(1) + fib(0) & \\
= & & \{ \text{ definizione di } fib\text{, tutti i casi } \} \\
 & fib(1) + fib(0) + 1 + 1 & \\
= & & \{ \text{ definizione di } fib\text{, primo e secondo caso } \} \\
 & 1 + 1 + 1 + 1 & \\
= & & \{ \text{ calcolo } \} \\
 & 4 &
\end{array}
$$

Di nuovo, gli elementi $1, 2, 3, 4$ sono tutti e soli quelli che si incontrano percorrendo il diagramma dell'esempio 2.8 dall'alto verso il basso a partire da 4.

Vediamo infine cosa accade nel caso della funzione foo dell'esempio 2.9 in corrispondenza del calcolo di $foo(3)$.

$$
\begin{array}{ll}
 & foo(3) \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } foo\text{, secondo caso } \} \\
 & 1 + foo(4) \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } foo\text{, terzo caso } \} \\
 & 1 + 1 + foo(5) \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } foo\text{, terzo caso } \} \\
 & 1 + 1 + 1 + foo(6) \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } foo\text{, terzo caso } \} \\
 & \ldots
\end{array}
$$

Anche in questo esempio gli elementi che si utilizzano nel calcolo sono quelli che si incontrano percorrendo il diagramma a partire dall'elemento 3, ovvero percorrendo una catena descrescente infinita: il calcolo non produce alcun valore e procede all'infinito. ■

Abbiamo appena visto un esempio di funzione non totale, il cui calcolo non termina mai in corrispondenza di alcuni elementi del suo dominio e abbiamo osservato come ciò sia strettamente correlato al fatto che la relazione di precedenza indotta dalla definizione ricorsiva non sia ben fondata. È evidente che un buon programmatore dovrebbe evitare di definire funzioni di questo tipo proprio perché, in alcuni casi, non producono alcun risultato.

Il fatto che la relazione indotta da una definizione di funzione sia ben fondata non ci dà purtroppo la certezza che la funzione sia totale. Il calcolo della funzione, infatti, può ridursi ad operazioni su argomenti per le quali le stesse non sono definite.

Esempio 2.11. Sia $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la seguente funzione

$$
g(n) = \begin{cases} 10 & \text{se } n = 0 \\ g(n-1) + 5 \ mod \ (n-1) & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

La relazione di precedenza $\prec_g$ è chiaramente ben fondata. Calcoliamo $g(2)$.

$$
\begin{array}{ll}
 & g(2) \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } g\text{, secondo caso } \} \\
 & \text{g(1) + 5 mod 1} \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } g\text{, secondo caso } \} \\
 & g(0) + 5 \ mod \ 0 + 5 \ mod \ 1 \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ definizione di } g\text{, primo caso } \} \\
 & 10 + 5 \ mod \ 0 + 5 \ mod \ 1 \\
= & \qquad\qquad \{ \text{ calcolo, poiché } 5 \ mod \ 1 = 0 \ \} \\
 & 10 + 5 \ mod \ 0 \\
= & \qquad\qquad \{ \ 5 \ mod \ 0 \text{ indefinito } \} \\
 & ??
\end{array}
$$

Il calcolo non può terminare correttamente dal momento che $5 \ mod \ 0$ richiede una divisione per 0 che, come ben sappiamo, non è definita. Abbiamo in questo caso una situazione di **errore**. ■

Rappresentiamo con il simbolo $\perp$ una situazione di errore come quella dell'ultimo esempio. Più precisamente, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, indichiamo con $B_\perp$ l'insieme $B \cup \{\perp\}$ ovvero l'insieme ottenuto da B aggiungendo il valore "speciale" $\perp$. L'idea è di considerare la definizione di f dal dominio A al codominio $B_\perp$ così da fare in modo che, in casi come quelli dell'esempio precedente, la funzione calcoli comunque un valore che è appunto $\perp$ nelle situazioni di errore. Con questa estensione, l'ultimo passo di calcolo dell'esempio diventa dunque

$$\begin{array}{lll} & 10 + 5\ mod\ 0 & \\ = & & \{\ 5\ mod\ 0 \text{ indefinito }\} \\ & \perp & \end{array}$$

Bisogna fare ben attenzione a non confondere la situazione in cui il calcolo *termina* ma in una situazione di errore (il valore "calcolato" è $\perp$) come nel caso della funzione g dell'esempio 2.12, dalla situazione in cui il calcolo *non termina* come nel caso della funzione foo dell'esempio 2.10.

Dagli esempi visti e dalle considerazioni fatte, possiamo stabilire la seguenti proprietà.

Proprietà Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione definita in modo ricorsivo e sia $\prec_f$ la relazione di precedenza indotta dalla definizione di f.

se $\prec_f$ è ben fondato allora la funzione $f : A \longrightarrow B_\perp$ è totale