PUMPING LEMMA

Per ogni linguaggio regolare L esiste una costante n tale che, per ogni $z \in L$ con $|z| > n$ esiste una scomposizione di $z = uvw$ tale che:

- $|uv| \leq n$
- $v \neq \varepsilon$
- per ogni $i \geq 0$ $uv^iw \in L$

Dimostrazione L regolare infinito. Sia A un automa a s.f. che riconosce L, con n stati.
Sia $z \in L$ con $|z| > n$.

$$z = \underbrace{a_1 \cdots\cdots a_n\, a_{n+1}} \cdots\cdots a_k$$

Sia

$$S_0, S_1, \ldots\ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots\ldots, S_k$$

la sequenza di stati in un cammino di riconoscimento di z. Per il pigeon hole principle

$$\underbrace{S_0, S_1, \ldots\ldots,}_{u} \underbrace{\bar{S}, \ldots\ldots,}_{v} \underbrace{\bar{S}, \ldots\ldots S_n, S_{n+1}, \ldots\ldots, S_k}_{w}$$

- $v \neq \varepsilon$
- $|uv| \leq n$

È ovvio che $uv^iw \in L$

Sia $i \geq 0$

$$\underbrace{s_0, \dots\dots, \bar{s}}_{u}, \underbrace{\underbrace{\dots\dots, \bar{s}}_{v}, \underbrace{\dots\dots, \bar{s}}_{v}, \dots\dots, \bar{s}}_{i \text{ volte}},$$

$$\underbrace{\dots\dots, s_m, s_{m+1}, \dots\dots, s_k}_{w}$$

$uw \in L$ quando $i = 0$

$$\underbrace{s_0,\dots\dots,\bar{s}}_{u},\underbrace{\dots\dots,s_m,\dots\dots,s_k}_{w}$$

in questo cammino non ripeto $\bar{s}$

$$s_0,\dots\dots,\bar{s},\dots\dots\dots\dots,s_k$$

il pumping lemma si usa per dimostrare che un dato linguaggio NON è regolare.

$\mathcal{L} = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$. Supponiamo che $\mathcal{L}$ sia regolare. Sia k la costante del pumping lemma

Sia $z = a^k b^k \in L$ $\quad |z| = 2k > k$

Allora $z = uvw$ tali che

- $|uv| \leq k$ $\Longleftarrow$ $uv = a^h$ $\quad v = a^{h1}$
- $v \neq \varepsilon$
- $uv^i w \in L$ per ogni $i \geq 0$
- $uw = a^{k-h1} b^k \notin \mathcal{L}$ poiché $h1 \neq 0$

ESERCIZI

1) $\Lambda = \{0, 1, \dots, 9\}$ cifre decimali

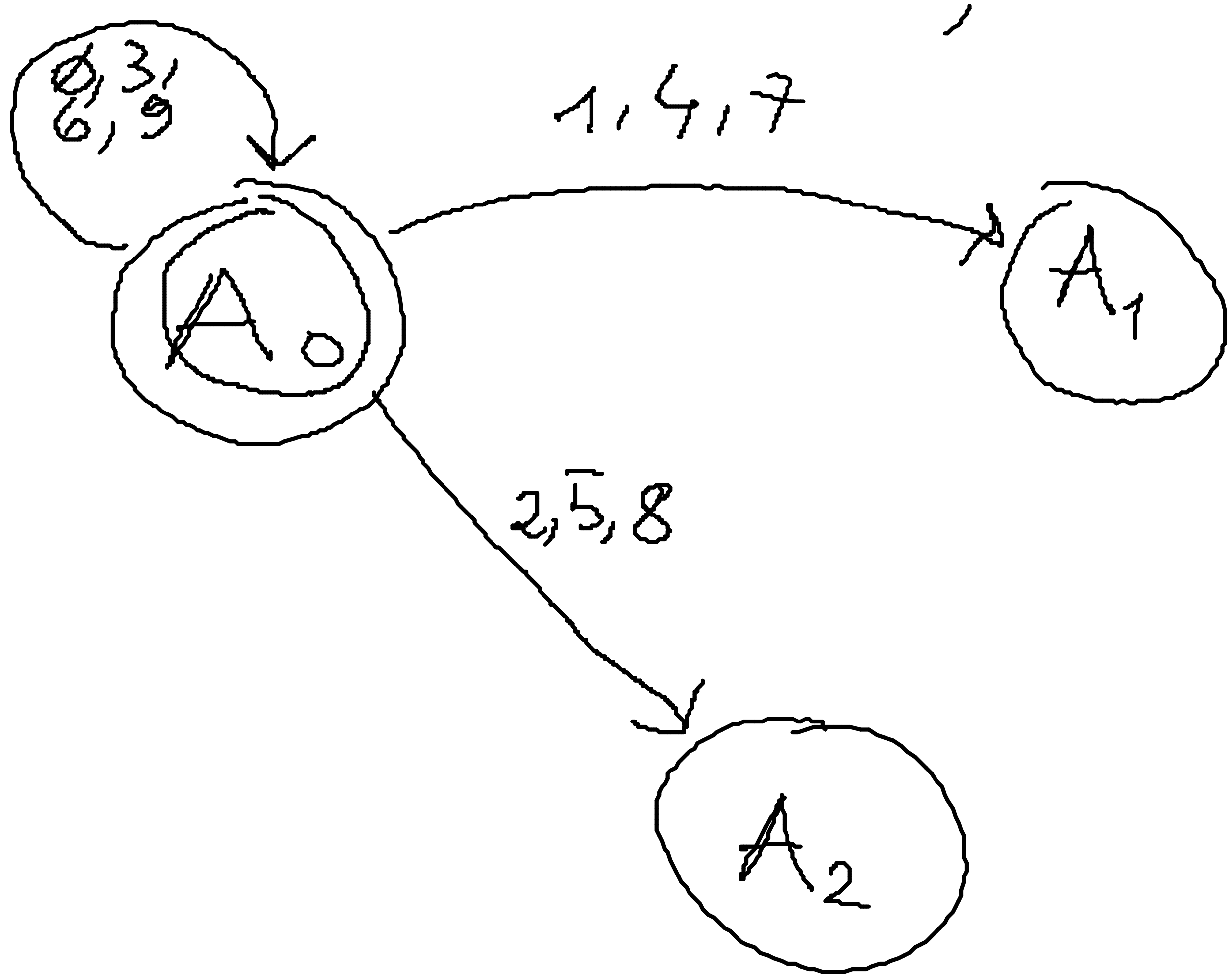
$$\mathcal{L} = \{ c_1 \dots c_k \mid c_1 \dots c_k \text{ è multiplo di } 3 \}$$

Costruiamo un automa che contiene almeno i seguenti 3 stati

A_0 – se l'automa è in A_0 le cifre consumate fino a quel momento rappresentano un numero multiplo di 3

A_1 – se l'automa si trova in A_1 le cifre consumate fino a quel momento rappresentano un numero che, diviso per 3, dà resto 1

A_2 – . . . . , dà resto 2

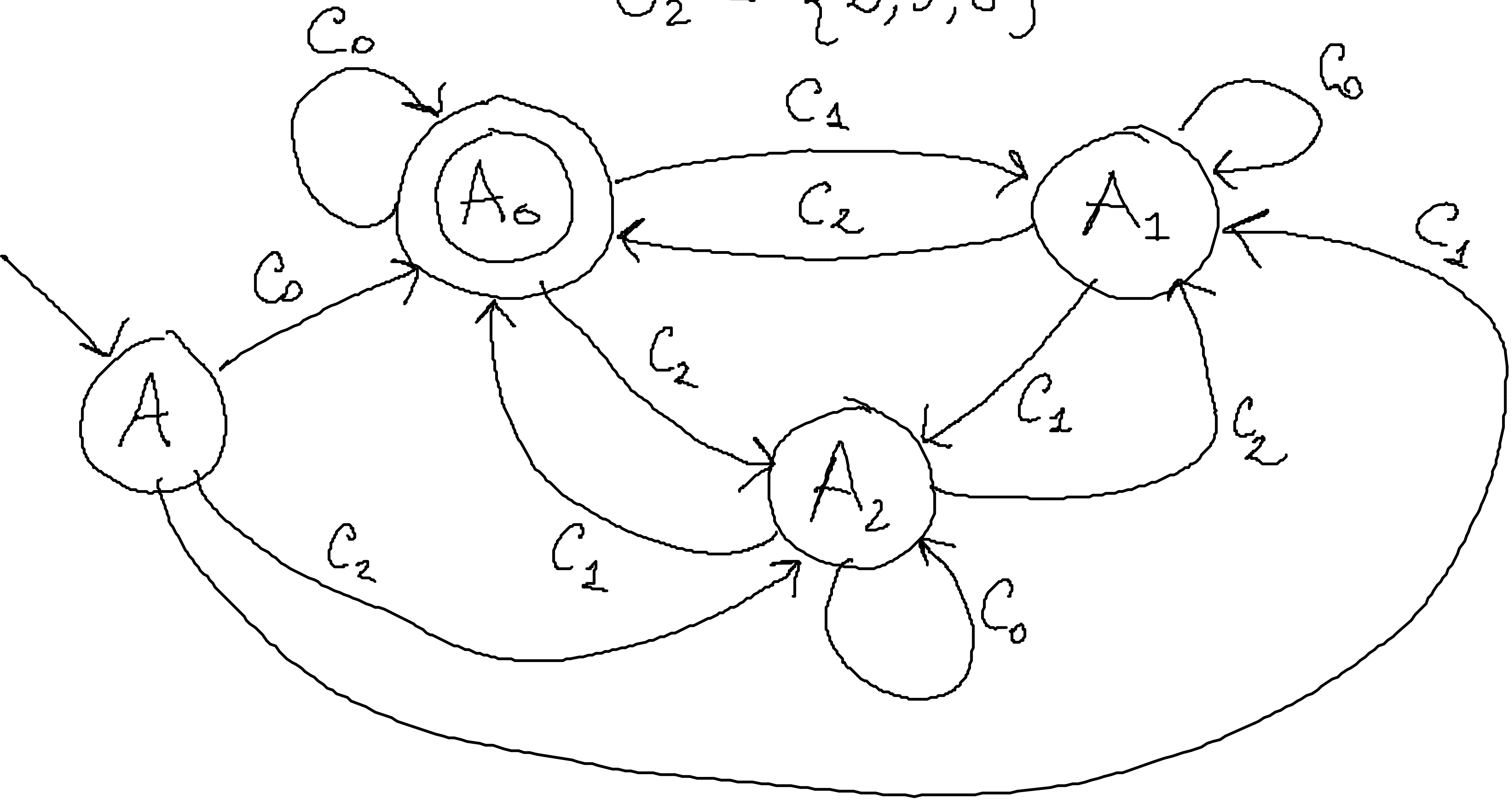


$C_0 \subseteq \Lambda$

$C_0 = \{0, 3, 6, 9\}$

$C_1 = \{1, 4, 7\}$

$C_2 = \{2, 5, 8\}$

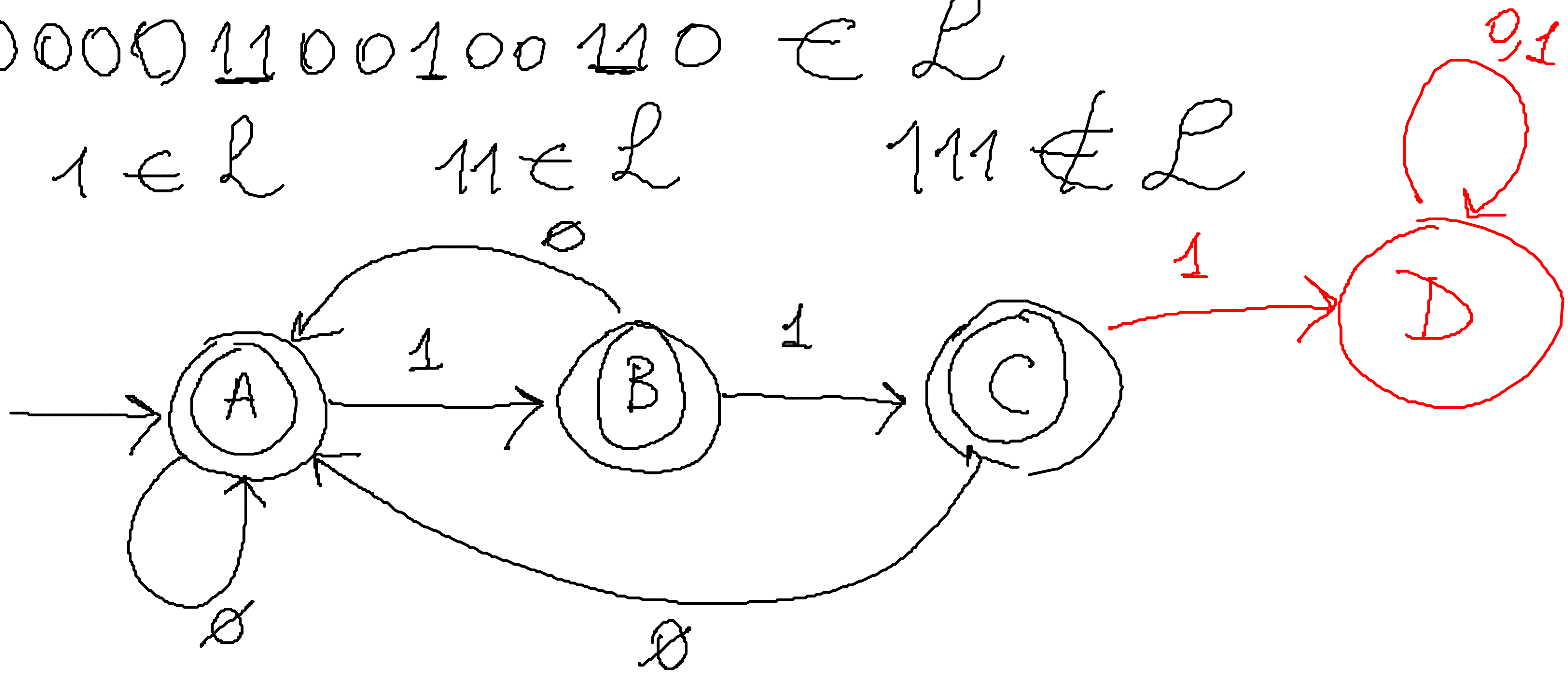


- $\Lambda = \{0, 1\}$

$\mathcal{L} = \{\alpha \in \Lambda^* \mid$ in α non ci sono più di due 1 consecutivi $\}$

$0000\underline{11}00100\underline{11}0 \in \mathcal{L}$

$1 \in \mathcal{L} \qquad 11 \in \mathcal{L} \qquad 111 \notin \mathcal{L}$



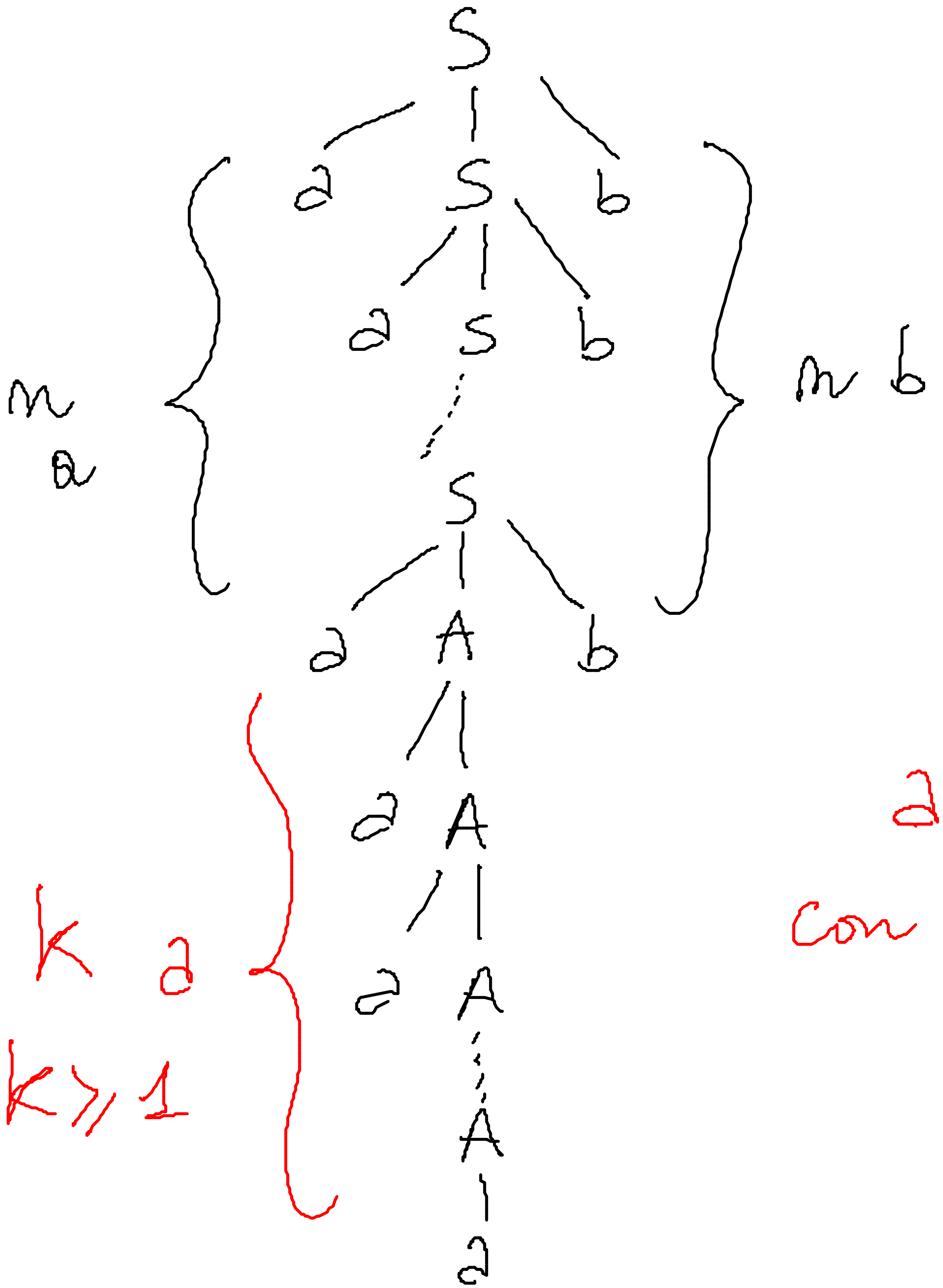
GRAMMATICHE

$\Lambda = \{a, b\}$ $\qquad \mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n > m \geq 1\}$

$aaab \in \mathcal{L} \qquad aab \in \mathcal{L} \qquad aabb \notin \mathcal{L}$

$$S \to aSb \mid \cancel{ab} \mid aAb$$

$$A \to a \mid aA$$



frontiera

$$a^k a^n b^n = a^m b^n \quad m > n$$

con $k \geq 1$

$$\mathcal{L} = \{ a^n b^m \mid m > n \geq 1 \}$$

$$S \to aSb \mid \underline{abB}$$

$$B \to b \mid bB$$

$$aB$$

$$a\underline{B}$$

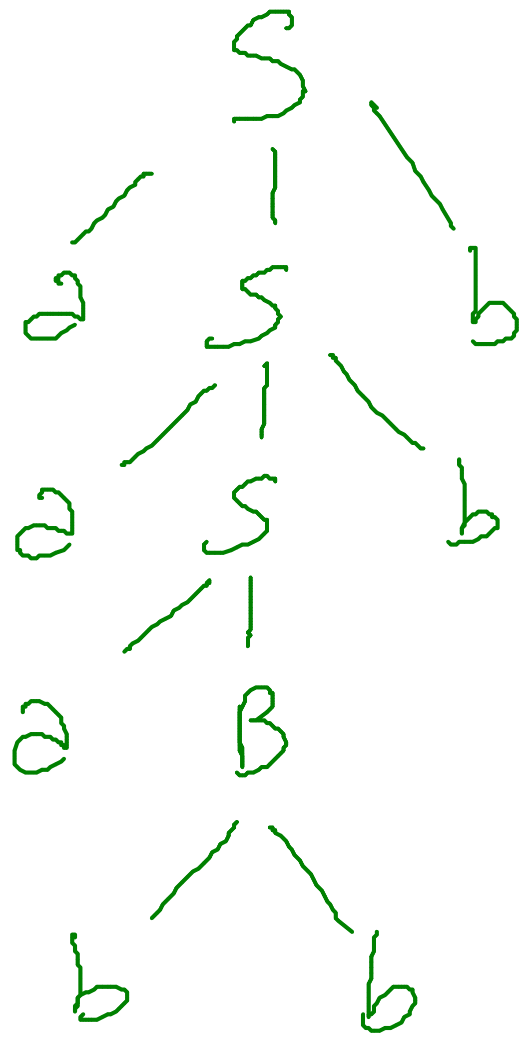
$$\boxed{B \to bb \mid bB}$$

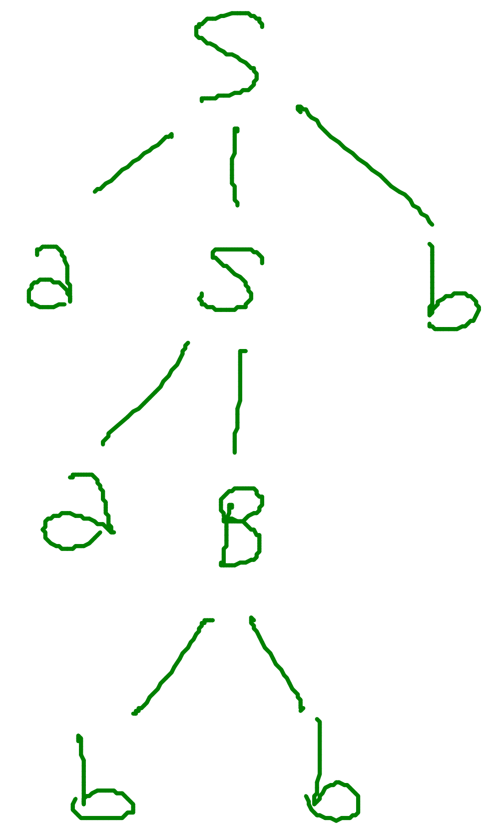
$$\mathcal{L}(B) = \{ b^m \mid m \geq 2 \}$$

aabbb

$S \to aSb \mid aB$

$B \to bb \mid bB$





$$S_1 \to aS_1b \mid aAb$$

$$A \to aA \mid a$$

$$\mathcal{L}(S_1) = \{a^n b^m \mid n > m \geq 1\}$$

$$S_2 \to aS_2b \mid abB$$

$$B \to bB \mid b$$

$$\mathcal{L}(S_2) = \{a^n b^m \mid m > n \geq 1\}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(S_1) \cup \mathcal{L}(S_2) = \mathcal{L}(S)} = \{a^n b^m \mid n \neq m\}$$

$n \geq 1 \quad m \geq 1$

$$S \to S_1 \mid S_2$$

Siano $G_1 = \langle \Lambda, V_1, S_1, P_1 \rangle$

$G_2 = \langle \Lambda, V_2, S_2, P_2 \rangle$

Sia $G = \langle \Lambda, V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\} \rangle$

$$\boxed{\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)} \quad ?$$

- l'unione deve essere disgiunta
- $V_1 \cap V_2 = \{\}$
- $P_1 \cap P_2 = \{\}$

$S \notin V_1 \quad S \notin V_2$

Se $V_1 \cap V_2 = \{\}$ e $S \notin V_1 \cup V_2$

allora $G = \langle \Lambda, V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, S, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\} \rangle$

genera il linguaggio

$$\mathcal{L}(G_1) \cup \mathcal{L}(G_2)$$

$\mathcal{L} = \{ a^n b^m \mid n > m \geq 1 \}$ NON è regolare.

Supponiamo che sia regolare. Sia K la costante del pumping lemma

$$|z| \geq K \qquad z = uvw$$

con $|uv| \leq K$, $v \neq \varepsilon$

$$u v^i w \notin \mathcal{L}$$