Teorema Se $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ è continua è anche monotona

Dim Siano $X_1 \subseteq X_2$ $\quad X_1, X_2 \in \mathbb{P}_A$

$$T(X_1) \cup T(X_2)$$

$$= \bigcup_{i=1,2} T(X_i)$$

$$= \{\text{continuità di } T\}$$

$$T\Big(\bigcup_{i=1,2} X_i\Big)$$

$$=$$

$$T(X_1 \cup X_2)$$

$$= \{X_1 \subseteq X_2\}$$

$$T(X_2)$$

$$T(X_1) \cup T(X_2) = T(X_2)$$

$$\Downarrow$$

$$T(X_1) \subseteq T(X_2)$$

c.v.d.

- L'unione tra insiemi è una operazione continua

$$\mathcal{F}_X(Y) = Y \cup X$$

- La composizione di trasformazioni continue è continua

  Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due trasformazioni continue

  Allora anche

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G}(X) = \mathcal{F}(\mathcal{G}(X))$$

  è continua

<u>NOTAZIONE</u> Sia $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ e sia $X \in \mathbb{P}_A$. Allora $T^i(X)$ è definito come segue, per $i \geq \emptyset$

$$T^i(X) = \begin{cases} X & \text{se } i = 0 \\ T(T^{i-1}(X)) & \text{se } i > 0 \end{cases}$$

$$T^i(X) = \underbrace{T(T(T \ldots (T(X)) \ldots))}_{i \text{ volte}}$$

TERMINOLOGIA

Sia $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$

Un insieme $\overline{X}$ tale che

$$\overline{X} = T(\overline{X})$$

si dice PUNTO FISSO di T

è invariante rispetto a T

TEOREMA DI RICORSIONE

Sia $T : \mathbb{P}_A \rightarrow \mathbb{P}_A$ una trasformazione CONTINUA.

Allora:

1) l'insieme $I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$ è punto fisso di T

2) I è il MINIMO PUNTO FISSO di T

cioè preso un qualunque punto fisso J (tale che $J = T(J)$) allora

$$I \subseteq J$$

LEMMA $T : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ continue.

Allora
$$T^i(\{\}) \subseteq T^{i+1}(\{\})$$
per ogni $i \geq \emptyset$.

$$T^0(\{\}) \subseteq T^1(\{\}) \subseteq T^2(\{\}) \subseteq \dots \subseteq T^k(\{\}) \subseteq \dots$$

Dimostrazione: per induzione

Passo base $i = 0$

$$
\begin{aligned}
& T^0(\{\}) \\
= \; & \{\text{def. di } T^k\} \\
& \{\} \\
\subseteq \; & \{\text{l'insieme vuoto è contenuto in qualunque insieme}\} \\
& T^1(\{\})
\end{aligned}
$$

Passo induttivo Supponiamo $T^{n}(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\})$

e dimostriamo $T^{n+1}(\{\}) \subseteq T^{n+2}(\{\})$

$$T^{n+1}(\{\})$$

$$= \quad \{\text{def. di } T^{k}\}$$

$$T(T^{n}(\{\}))$$

$$\subseteq \quad \{T^{n}(\{\}) \subseteq T^{n+1}(\{\}),\ T \text{ è monotona}\}$$

$$T(T^{n+1}(\{\}))$$

$$= \quad \{\text{def. di } T^{k}\}$$

$$T^{n+2}(\{\})$$

c.v.d.

Dimostrazione di 1) del th. di ricorsione

$$I = \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\}) \quad \text{è punto fisso di } T$$

$$T(I)$$

$$= T\left(\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})\right)$$

$$= \left\{ \underline{T^0(\{\}) \subseteq T^1(\{\}) \subseteq} \dots, \ \underline{T \text{ è continua}} \right\}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T(T^i(\{\}))$$

$$= \bigcup_{i \geq 0} T^{i+1}(\{\})$$

$$= \bigcup_{i \geq 1} T^{i}(\{\}) \qquad \bigcup_{i \geq 0} T^{i+1}(\{\})$$

$$= \{\, \{\} \cup B = B,\ T^{0}(\{\}) = \{\} \,\}$$

$$T^{0}(\{\}) \cup \bigcup_{i \geq 1} T^{i}(\{\})$$

$$I = T(I)$$

$$= \bigcup_{i \geq 0} T^{i}(\{\})$$

$$= \underline{I}$$

2) Dimostriamo che $I \subseteq J$, per ogni J punto fisso di T

LEMMA Se $J = T(J)$ allora per ogni $i \geq 0$

$$\underline{T^i(\{\}) \subseteq J}$$

$$\Rightarrow T(T^n(\{\})) \subseteq J$$

Dim.

Passo base

$$T^0(\{\}) = \{\} \subseteq J$$

Passo induttivo Ip. $T^n(\{\}) \subseteq J$

$$T^{n+1}(\{\}) = \{\text{def di } T^k\}\ T(T^n(\{\})) \subseteq \{\text{Ip. ind, e monotonia di } T\}\ T(J) = \{J \text{ è punto fisso}\}\ J$$

Allora

$$I$$

$$= \bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\})$$

$$\subseteq \{ \text{per ogni } i \geq 0 \ T^i(\{\}) \subseteq J \}$$

$$\subseteq J$$

$$A \cup B$$

$$\subseteq \{ A \subseteq X , B \subseteq Y \}$$

$$X \cup Y$$

APPLICAZIONE del TH. di RICORSIONE $\mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$$X = \{1\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$$

$$X = T(X)$$

dove $T(X) = \{1\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in X\}$

$$T^0(\{\}) = \{\}$$

$$T^1(\{\}) = T(T^0(\{\})) = T(\{\})$$

$$= \{1\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge \underline{\underline{n-2 \in \{\}}}\}$$

$$= \{1\}$$

$$T^2(\{\}) = T(T^1(\{\})) = T(\{\underline{\underline{1}}\})$$

$$= \{1\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n-2 \in \{1\}\}$$

$$= \{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\}$$

$$T^3(\{\}) = \{1, 3, 5\} \longleftarrow T^?(\{\})$$

$$T^4(\{\}) = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} T^i(\{\}) = \{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } n \text{ è dispari}\}$$

$\mathbb{P}_{\mathbb{N}}$

$$V(X) = X \cup \{250, 74\}$$

$$X = V(X)$$

$$V^0(\{\}) = \{\} \qquad V^1(\{\}) = V(\{\}) = \{\} \cup \{250, 74\}$$

$$= \{\underline{\underline{250, 74}}\}$$

$$V^2(\{\}) = V(V^1(\{\})) = V(\{250, 74\}) =$$

$$= \{250, 74\} \cup \{250, 74\} = \{250, 74\}$$

$\{250, 74\} = I$ è il minimo punto fisso di V

Se per qualche $k \geq 0$ $T^k(\{\}) = T^{k+1}(\{\})$ allora $T^k(\{\})$ è il minimo punto fisso di T

$$I = T^0(\{\}) \cup T^1(\{\}) \cup \cdots \cup \underbrace{T^k(\{\}) \cup T^{k+1}(\{\}) \cup \cdots}_{T^k(\{\})}$$

APPLICAZIONE del TH. di RICORSIONE alle GRAMMATICHE

$$S \rightarrow ab \mid aSb$$

$$S = \underbrace{\{a\}\{b\}} \cup \{a\}S\{b\}$$

$\{a\}\{b\} \Rightarrow$ concatenazione di linguaggi

$$L_1 L_2 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1 \wedge \beta \in L_2\}$$

PROPRIETA' della CONCATENAZIONE di LINGUAGGI

$$L_1\{\} = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1 \wedge \underline{\beta \in \{\}}\} = \{\}$$

$$\{\}L_1 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in \{\} \wedge \beta \in L_1\} = \{\}$$

Il linguaggio vuoto $\{\}$ è lo ZERO per la concatenazione

$$L\{\} = \{\}L = \{\}$$

$$\{\varepsilon\}L = \{\alpha\beta \mid \alpha \in \{\varepsilon\} \wedge \beta \in L\} =$$

$$\{\varepsilon\beta \mid \beta \in L\} = \{\beta \mid \beta \in L\} = L$$

$$L\{\varepsilon\} = L$$

è l'UNO per la concatenazione

$L_1 = \{a, ab, bbb\}$ $L_2 = \{b, ba\}$

$L_1 L_2 = \{ab, aba, abb, abba, bbbb, bbbba\}$

<u>Teorema</u> La concatenazione di linguaggi è una trasformazione continua

$S \to ab \mid aSb$

$S = T(S)$ dove

$T(S) = \{a\}\{b\} \cup \{a\}S\{b\}$ T è continua

Calcoliamo il minimo punto fisso di T

$T^0(\{\}) = \{\}$

$T^1(\{\}) = T(T^0(\{\})) = T(\{\}) =$

$= \{a\}\{b\} \cup \underline{\{a\}\{\}\{b\}}$

$= \{a\}\{b\} = \{ab\}$

$T^2(\{\}) = T(\{ab\}) =$

$= \{a\}\{b\} \cup \{a\}\{ab\}\{b\} = \{ab, aabb\}$

$$T^3(\{\}) = T(\{ab, aabb\}) = \underline{\{a\}\{b\}} \cup \{a\}\{ab, aabb\}\{b\}$$

$$= \{ab, aabb, aaabbb\}$$

È facile convincersi che

$$T^k(\{\}) = \{a^i b^i \mid 0 < i \leq k\}$$

$$\bigcup_{k \geq 0} T^k(\{\}) = \bigcup_{k \geq 0} \{a^i b^i \mid 0 < i \leq k\} =$$

$$= \{a^n b^n \mid 0 < n\}$$

In generale: data una grammatica

$$G = \langle \Lambda, V, S, P \rangle$$

si ottiene un sistema di eq. ricorsive come segue

- ogni $x \in \Lambda$ viene rimpiazzato dal linguaggio $\{x\}$
- ogni $A \in V$ viene rimpiazzato da una "variabile" A su linguaggi
- le sequenze di simboli nelle parti destre delle produzioni vengono rimpiazzate dalla concatenazione dei corrispondenti trasformati
- il simbolo $|$ viene rimpiazzato da $\cup$
- $\rightarrow$ " " $=$

Esempio

$$S \to A \mid B \mid AB$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bB \mid b$$

$$\begin{cases} S = A \cup B \cup AB \\ A = \{a\}A \cup \{a\} \\ B = \{b\}B \cup \{b\} \end{cases}$$

tre equazioni in 3 incognite S, A, B

$$S = \tau_S(A, B, S)$$
$$A = \tau_A(A, B, S)$$
$$B = \tau_B(A, B, S)$$

$$S^0 = \tau_S^0(\{\}, \{\}, \{\}) = \{\}$$
$$A^0 = \tau_A^0(\{\}, \{\}, \{\}) = \{\}$$
$$B^0 = \tau_B^0(\{\}, \{\}, \{\}) = \{\}$$

$$S^1 = \tau_S(A^0, B^0, S^0) \qquad S^k = \tau_S(A^{k-1}, B^{k-1}, S^{k-1})$$
$$A^1 = \tau_A(A^0, B^0, S^0) \quad \cdots\cdots \quad A^k = \tau_A(A^{k-1}, B^{k-1}, S^{k-1})$$
$$B^1 = \tau_B(A^0, B^0, S^0) \qquad B^k = \tau_B(A^{k-1}, B^{k-1}, S^{k-1})$$

$$S \to A \mid B \mid AB$$
$$A \to aA \mid a$$
$$B \to bB \mid b$$

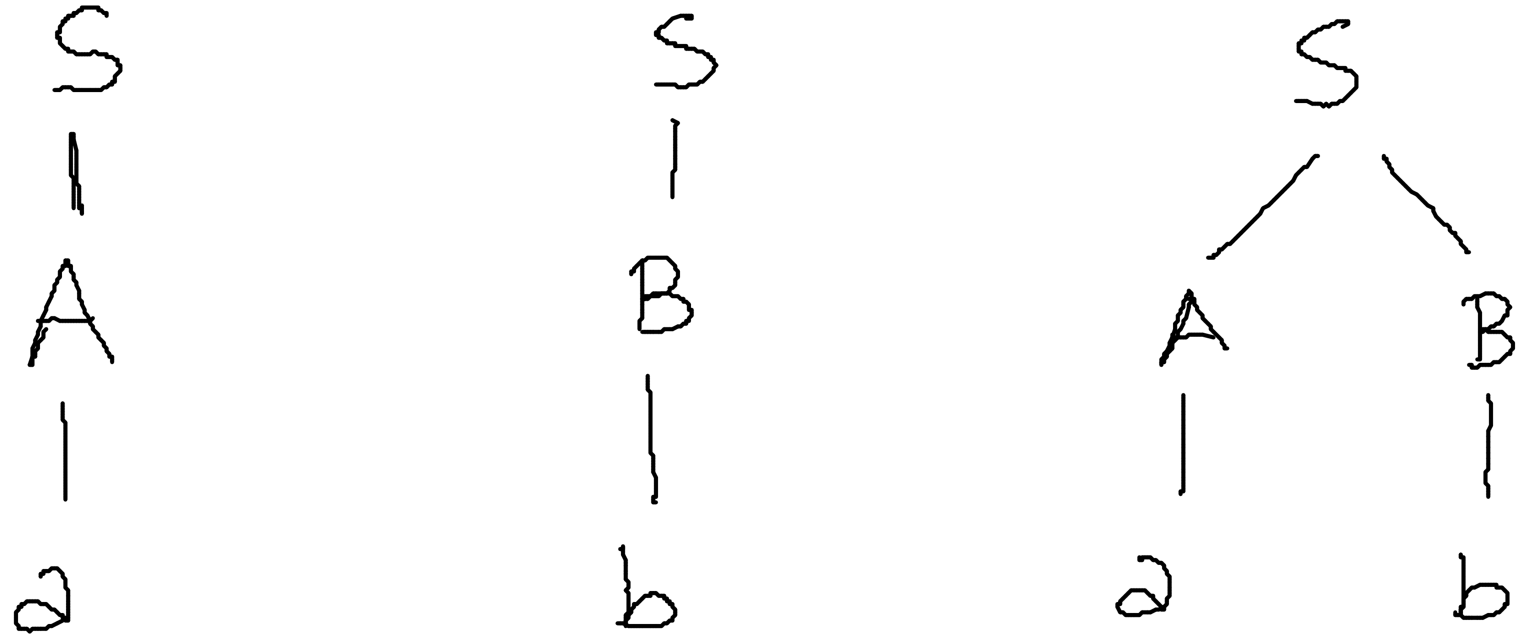
$$S^0 = A^0 = B^0 = \{\}$$

$$S^1 = A^0 \cup B^0 \cup A^0B^0 = \{\} \cup \{\} \cup \{\}\{\} = \{\}$$

$$A^1 = \{a\}\{\} \cup \{a\} = \{a\}$$

$$B^1 = \{b\}\{\} \cup \{b\} = \{b\}$$

$$S^2 = A^1 \cup B^1 \cup A^1B^1 = \{a\} \cup \{b\} \cup \{a\}\{b\} =$$
$$= \{a, b, \underline{ab}\}$$



Se $\alpha \in \mathcal{L}(G)$ allora $\alpha \in T_S^k(\{\},\ldots,\{\})$
per qualche k

Se $\alpha \in T_{\underline{S}}^k(\{\},\ldots,\{\})$ allore $\alpha \in \mathcal{L}(G)$

$$L_1\{\} = \{\alpha\beta \mid \alpha \in L_1 \wedge \beta \in \{\}\} = \{\}$$

$$\{\}L_1 = \{\alpha\beta \mid \alpha \in \{\} \wedge \beta \in L_1\} = \{\}$$

Il linguaggio vuoto $\{\}$ è lo ZERO per la concatenazione

$$L\{\} = \{\}L = \{\}$$

$$\{\varepsilon\}L = \{\alpha\beta \mid \alpha \in \{\varepsilon\} \wedge \beta \in L\} =$$

$$\{\varepsilon\beta \mid \beta \in L\} = \{\beta \mid \beta \in L\} = L$$

$$L\{\varepsilon\} = L$$

è l'UNO per la concatenazione