UNIONE è una TRASFORMAZIONE CONTINUA

Teorema Sia $F_X : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ la trasf. (con $X \in \mathbb{P}_A$)

$$F_X(Y) = X \cup Y$$

F è continua.

Dim. Sia $Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_i \subseteq \dots$

$$\bigcup_{i \geq 0} F_X(Y_i)$$

$= \{\text{def. di } F_X\}$

$$\bigcup_{i \geq 0} (X \cup Y_i)$$

$= \{\text{proprietà di } \cup\}$

$$X \cup \bigcup_{i \geq 0} Y_i$$

$= \{\text{def. di } F_X\}$

$$F_X\left(\bigcup_{i \geq 0} Y_i\right)$$

c.v.d.

COMPOSIZIONE di TRASF. CONTINUE è CONTINUA

Teorema Siano $F, G : \mathbb{P}_A \to \mathbb{P}_A$ trasf. continue.

Allora $F \circ G$ è continua

$$(F \circ G)(X) = F(G(X))$$

Dim. Sia $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_i \subseteq \dots$

$$F\left(G\left(\bigcup_{i \geq 0} X_i\right)\right)$$

$$= \{\text{continuità di } G\}$$

$$F\left(\bigcup_{i \geq 0} G(X_i)\right)$$

$$= \{\text{continuità di } F, \text{ monotonia di } G\}$$

$$\bigcup_{i \geq 0} F(G(X_i))$$

$$X_k \subseteq X_{k+1}$$

$$\Rightarrow \{\text{monotonia di } G\}$$

$$G(X_k) \subseteq G(X_{k+1})$$

Esercizio La concatenazione è continua

Sia L un linguaggio $L \subseteq \Lambda^*$

Sia $F_L(L') = LL'$

F_L è continua

o ———— o

ESEMPIO

$$\mathcal{L} = \{ a^m b^n \mid m > n \geq 1 \}$$

$$S \rightarrow aSb \mid Aab$$

$$A \rightarrow aA \mid a$$

$$\Downarrow$$

TRASFORMAZIONE IN SISTEMA DI EQUAZIONI

$$S = \{a\} S \{b\} \cup A \{a\}\{b\}$$

$$A = \{a\} A \cup \{a\}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} S = T_S(A, S) = \{a\} S \{b\} \cup A \{a\}\{b\} \\ A = T_A(A) = \{a\} A \cup \{a\} \end{cases}$$

NOTAZIONE $S^i = T_S^i(\{\}, \{\}) = T_S(S^{i-1}, A^{i-1})$ $i>0$

$$A^i = T_A^i(\{\}) = T_A(A^{i-1})$$

$S^0 = \{\}$ $\quad S^1 = T_S(\{\}, \{\}) = \{a\}\{\}\{b\} \cup \{\}\{a\}\{b\} = \{\}$

$A^0 = \{\}$ $\quad A^1 = T_A(\{\}) = \{a\}\{\} \cup \{a\} = \{a\}$

Se $T^k(\{\}) = T^{k+1}(\{\})$ allora $T^k(\{\})$ è il min. pto fisso

Nel caso di sistemi di equazioni

$(X_0^i, \ldots, X_k^i) = (X_0^{i-1}, \ldots, X_k^{i-1})$ allora

abbiamo raggiunto la k-upla minimo punto fisso

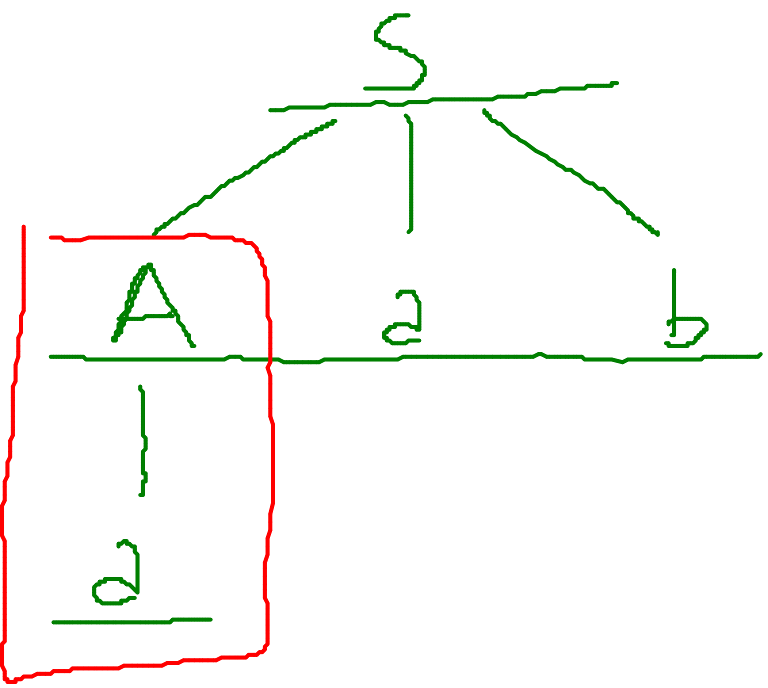
$$(S^0, A^0) = (\{\}, \{\}) \neq (\{\}, \{a\}) = (S^1, A^1)$$

$$S^2 = T_S(S^1, A^1) = \{a\}\, S^1 \{b\} \cup A^1 \{a\}\{b\}$$

$$= \underline{\{a\}\{\,\}\{b\}} \cup \{a\}\{a\}\{b\} = \{\underline{aab}\}$$

$$A^2 = T_A(A^1) = \{a\} A^1 \cup \{a\} = \{a\}\{a\} \cup \{a\}$$

$$= \{aa, a\}$$



profondità dell'albero di derivazione = numero dei livelli

$S \to aSb \mid Aab$

$A \to aA \mid a$

min. pto fisso

$$(\bar{S}, \bar{A}) = \left(\bigcup_{i \geq 0} S^i, \bigcup_{i \geq 0} A^i\right)$$

$$S^3 = T_S(S^2, A^2) = \{a\}S^2\{b\} \cup A^2\{a\}\{b\}$$

$$= \{a\}\{aab\}\{b\} \cup \{a, aa\}\{a\}\{b\}$$

$$= \{aaabb, aab, aaab\}$$

costruire l'albero di derivazione

$$A^3 = T_A(A^2) = \{a\}A^2 \cup \{a\} =$$

$$= \{a\}\{a, aa\} \cup \{a\} = \{a, aa, aaa\}$$

$\dot{S}\dot{S}$ $\quad S = \{a, b\}$

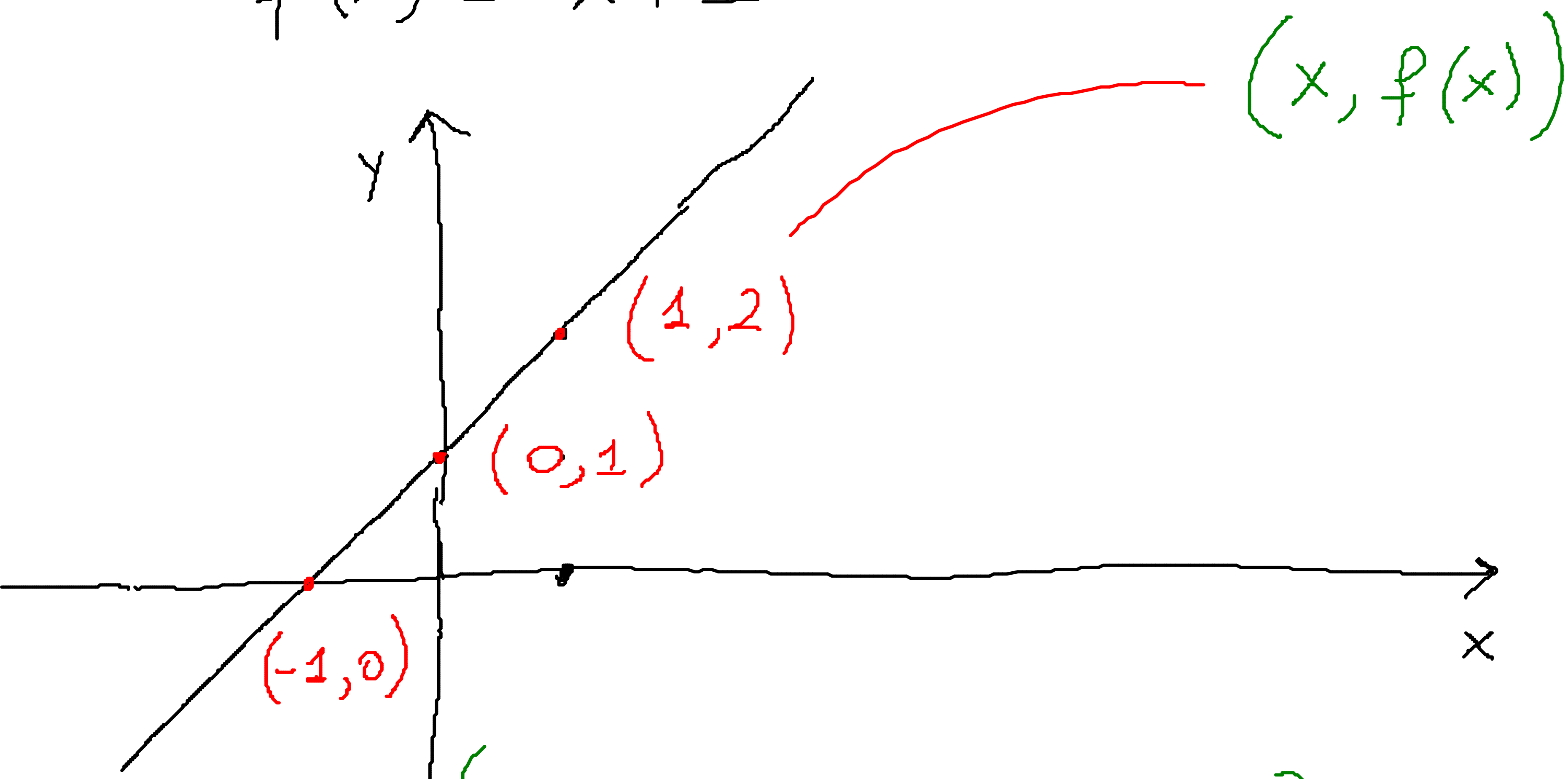
$\{a, b\}\{a, b\} = \{aa, ab, ba, bb\}$

Si può dimostrare formalmente che

- $\alpha \in \mathcal{L}(S)$ ed è frontiera di un albero di derivazione profondo k allora $\alpha \in T_S^k(\ldots\ldots)$
- se $\alpha \in T_S^k(\ldots\ldots)$ e $\alpha \notin T_S^{k-1}(\ldots\ldots)$ allora α è frontiera di un albero di derivazione profondo k, e quindi $\alpha \in \mathcal{L}(S)$

GRAFICO di UNA FUNZIONE

$$f(x) = x + 1$$



$$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R} \} \qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Sia $f : A \longrightarrow B$

Definiamo :

$$G_f \subseteq A \times B$$

$$G_f = \left\{ (a, b) \;\middle|\; \begin{array}{l} a \in A \wedge b = f(a) \\ b \in B \wedge \end{array} \right\}$$

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = \emptyset \\ n * (n-1)! & \text{se } n > 0 \end{cases} \qquad ! : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$G_! = \{(0,1)\} \cup \{(n, m) \mid n > 0 \wedge m = n * m' \wedge (n-1, m') \in G_! \}$$

$$G_! = \{(0,1)\} \cup \{(n,m) \mid n>0 \wedge m = n * m' \wedge (n-1, m') \in G_!\}$$

$$G_! = T(G_!) = \quad '' \qquad '' \qquad ''$$

$$G_!^0 = \{\}$$

$$G_!^1 = \{(0,1)\} \cup \{(n,m) \mid n>0 \wedge m = n * m' \wedge (n-1, m') \in \cancel{G_!^0}\ \{\}\}$$

$$= \{(0,1)\} \cancel{\cup \{\}}$$

$$G_!^2 = T(G_!^1) = \{(0,1)\} \cup \{(n,m) \mid n>0 \wedge m = n * m' \wedge \underbrace{(n-1, m') \in G_!^1}_{(0,1) \in G_!^1}\}$$

$$= \{(0,1), (1,1)\}$$

$$(1,1)$$

$$G_!^3 = T(G_!^2) = \{(0,1)\} \cup \{(n,m) \mid n>0 \wedge m = n * m' \wedge (n-1, m') \in \{(0,1),(1,1)\}\}$$

$$= \{(0,1), (1,1), (2,2)\}$$

$$G_!^4 = T(G_!^3) = \{(0,1), (1,1), (2,2), (3,6)\}$$

$$G_!^5 = G_!^4 \cup \{(4,24)\}$$

$$(n-1, m')$$
$$\Downarrow$$
$$(n, n*m')$$

Se $f : A \to B$ ricorsiva, la corrispondente equazione che definisce G_f è una equazione ricorsiva su insiemi

La funzione "astratta" calcolata da f è quella il cui grafico è il minimo punto fisso dell'equazione ricorsiva

$$G_f = \tau(G_f)$$

$n!$ calcola la funzione il cui grafico è

$$\{(0,1),(1,1),(2,2),(3,6),(4,24),(5,120),\ldots\}$$

Il teorema di ricorsione ci permette di dire che le nostre definizioni ricorsive di funzioni "calcolano" una funzione astratta

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = \emptyset \\ 1 + f(x+1) & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad f: N \to N$$

n

$m = 1 + m'$

$$G_f = T(G_f) = \{(0,1)\} \cup \{(n,m) \mid n > 0 \wedge m = 1 + m' \wedge (n+1, m') \in G_f\}$$

$G_f^0 = \{\}$ $\qquad G_f^1 = \{(0,1)\} \cup \{ \ldots \mid \ldots \ (n+1, m') \in \cancel{G_f^0} \}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \{\}$

$\qquad = \{(0,1)\}$

$$G_f^2 = \{(0,1)\} \cup \{ (n,m) \mid \underline{\underline{n>0}} \wedge m = \underline{1} + m' \wedge \underline{(n+1, m')} \in \underbrace{\{(0,\underline{1})\}}_{G_f^1} \}$$

$$= \{(0,1)\}$$

$n \in \mathbb{N} \quad n > 0$

$(n+1, m') = (0, \underline{1})$

$G_f^2 = G_f^1 \leftarrow$ è il minimo punto fisso

La funzione "astratta" calcolata dalla definizione ricorsiva di f è la funzione il cui grafico è l'insieme $\{(0,1)\}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$3!$$

$$= \{\text{def. } !\}$$

$$3 * 2!$$

$$= \{\text{def } !\}$$

$$3 * 2 * 1!$$

$$= \{\text{def. } !\}$$

$$3 * 2 * 1 * 0!$$

$$= \{\text{def } !\}$$

$$3 * 2 * 1 * 1$$

$$= 6$$

$$f(3)$$

$$= \{\text{def. di } f\}$$

$$1 + f(4)$$

$$=$$

$$1 + f(5)$$

$$=$$

$$1 + f(6)$$

$$=$$

$$\vdots$$

$$f(0)$$

$$= 1$$

Dobbiamo garantire che le nostre funzioni ricorsive prevedano:

1) che il calcolo sia "non ricorsivo" (immediato) in alcuni casi (0 se nel caso !)

2) che, in tutti gli altri casi, il calcolo ricorsivo consenta di ricondursi "prima o poi" ai casi in 1)

FORMALIZZARE le nozioni in 1) e 2)

PRINCIPIO DI INDUZIONE BEN FONDATA

Relazione (ben fondata) su insiemi

Relazione di precedenza : dato un insieme S una relazione di precedenza R su S è

$R \subseteq S \times S$

Usiamo per R la notazione INFISSA

scriviamo $x R y$ per indicare $(x, y) \in R$

$\prec, \sqsubset, <$

Data $\sqsubset$ relazione di precedenza

se $x \sqsubset y$ diremo:

(immediato)

Secondo $\sqsubset$

- x precede y
- x è predecessore di y
- y è successore (immediato) di x

Definizione di relazione ben fondata

Sia S un insieme e $\sqsubset$ una relazione di precedenza su S.

$\sqsubset$ si dice ben fondata se non esiste una sequenza DECRESCENTE INFINITA di elementi di S rispetto a $\sqsubset$

$$s_0 \sqsupset s_1 \sqsupset s_2 \sqsupset \cdots \cdots \sqsupset s_k \sqsupset \cdots \quad .$$

$$s_i \in S$$

ESEMPIO : $\mathbb{N}$

$x \sqsubset y$ se e solo se $x = y - 1$

$0 \sqsubset 1 \quad 1 \sqsubset 2 \quad 2 \sqsubset 3 \quad 3 \sqsubset 4$

$n \sqsupset n-1 \sqsupset n-2 \sqsupset \dots \sqsupset 3 \sqsupset 2 \sqsupset 1 \sqsupset 0$

$\sqsubset$ è ben fondata!

$\mathbb{N}$ $\quad x \prec y$ se e solo se $x = y + 1$

$$\underline{n} \succ \underline{n+1} \succ \underline{n+2} \succ \ldots \ldots \succ n+k \succ \ldots$$

sequenza (CATENA) decrescente infinita

NON È BEN FONDATA