

UNIVERSITÀ DI PISA



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

Progetto di: Modelli della Fisica

Il Modello di Kaldor

Luca Pardini

Anno Accademico 2006/2007

Indice

1	Il modello di Kaldor	1
1.1	Analisi del problema	3
2	Equilibri e Stabilità	5
2.1	Punti di equilibrio	5
2.2	Stabilità del sistema	5
3	Sperimentazione	9
3.1	Sistema stabile	9
3.2	Sistema instabile	11
3.3	Simulazione dell'economia	13
	Bibliografia	17
A	Codice del simulatore	19

Elenco delle figure

1.1	Andamento delle funzioni S e I	2
1.2	Variazione di I rispetto a Y	4
2.1	Andamento della funzione $12\left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000$	7
2.2	Andamento della funzione $\left(12\left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000\right)^2$	8
3.1	Andamento del sistema stabile con autovalori reali rispetto a X e t	9
3.2	Andamento del sistema stabile con autovalori reali rispetto a Y e t	10
3.3	Andamento del sistema stabile con autovalori reali rispetto a X e Y	10
3.4	Andamento del sistema stabile con autovalori immaginari rispetto a X e t	11
3.5	Andamento del sistema stabile con autovalori immaginari rispetto a Y e t	11
3.6	Andamento del sistema stabile con autovalori immaginari rispetto a X e Y	12
3.7	Andamento del sistema instabile con autovalori reali rispetto a X e t	12
3.8	Andamento del sistema instabile con autovalori reali rispetto a Y e t	13
3.9	Andamento del sistema instabile con autovalori reali rispetto a X e Y	13
3.10	Andamento del sistema instabile con autovalori immaginari rispetto a X e t	14
3.11	Andamento del sistema instabile con autovalori immaginari rispetto a Y e t	14
3.12	Andamento del sistema instabile con autovalori immaginari rispetto a X e Y	15
3.13	Andamento del sistema economico rispetto a X e t	15
3.14	Andamento del sistema economico rispetto a Y e t	16
3.15	Andamento del sistema economico rispetto a X e Y	16

Capitolo 1

Il modello di Kaldor

In questo progetto vogliamo analizzare il sistema economico di una nazione secondo il modello di Nicholas Kaldor [Kal40, Kal57] dove, per semplicità, assumeremo costante la popolazione lavoratrice.

Iniziamo individuando la variabile fondamentale del nostro sistema economico come la percentuale del numero di persone che lavorano in un istante t :

$$X \in (0, 100)$$

Per la descrizione dei fenomeni economici, in questo modello vengono utilizzate due grandezze:

- S che rappresenta la tendenza al risparmio da parte dei lavoratori;
- I che rappresenta la tendenza all'investimento da parte delle aziende.

Queste due grandezze dipendono esclusivamente da X e sono soggette alle seguenti considerazioni:

- se il livello di occupazione è basso l'economia è in crisi: ci sono poche persone che lavorano prendendo poco stipendio quindi poche persone potranno permettersi di investire;
- se il livello di occupazione è alto ci sono tante persone che lavorano prendendo uno stipendio alto e essendoci pochi lavoratori disponibili sono in grado di contrattare per aumentarlo;
- l'investimento esiste anche quando l'azienda è in perdita, e utilizza il denaro non tanto per guadagnare ma per riprendersi dalla situazione di crisi in cui si trova, quindi è presente una spesa fissa che l'azienda sostiene non dipendente dal numero di lavoratori;

- l'aggiunta di nuovi lavoratori fa aumentare tutti gli stipendi, anche a quelli precedentemente assunti, quindi a un certo punto la tendenza all'investimento si ferma.

Il comportamento delle due funzioni è schematizzato in figura 1.1.

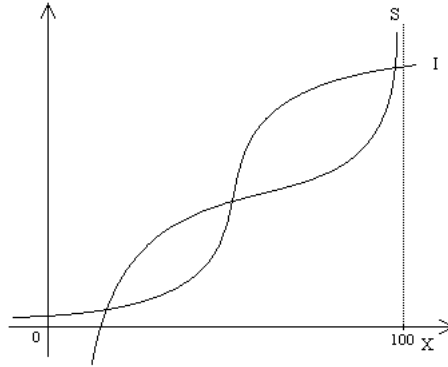


Figura 1.1: *Andamento delle funzioni S e I*

La funzione X in funzione del tempo t può essere scritta con la seguente equazione differenziale:

$$\frac{dX}{dt} = I(X) - S(X)$$

Come vediamo dal grafico in figura 1.1, X ha tre punti di equilibrio che corrispondono ai punti di incontro tra la funzione S e la funzione I . Questi punti corrispondono ad un livello di occupazione rispettivamente basso, medio e alto. Analizzando la stabilità di questi punti possiamo osservare che:

- nel punto di equilibrio con bassa occupazione la derivata di X è negativa, dal grafico notiamo che S cresce più velocemente di I , quindi il punto di equilibrio è *stabile*;
- nel punto di equilibrio con media occupazione la derivata di X è positiva, quindi il punto di equilibrio è *instabile*;
- nel punto di equilibrio con alta occupazione la derivata di X è ancora una volta negativa, anche in questo caso il punto di equilibrio è *stabile*.

In questo modello quello che conta è il costo del lavoro e in base a quello decidiamo se investire o meno.

1.1 Analisi del problema

Nel nostro problema è presente un altro dato importante che consiste nella quantità di invenduto presente in magazzino. L'invenduto è importante perché incide sull'investimento, in particolare con un'alta quantità di invenduto l'investimento che un'azienda si può permettere è minore.

Introduciamo una nuova variabile Y in funzione di X e di t che denota il numero di merci in magazzino che non sono state ancora vendute, mentre per i valori negativi denotiamo gli ordini che l'azienda non ha potuto evadere per insufficienza di materiale nel magazzino. L'andamento di Y è dato dalla differenza tra la quantità prodotta ad un istante t rispetto alla quantità venduta. Per darne una definizione dobbiamo assumere la presenza di due grandezze entrambe sempre positive:

- la grandezza p che denota la produttività media per punto percentuale, in questo modo il prodotto pX denota il numero di prodotti fabbricati;
- la grandezza u che denota la quantità media di ordinazioni che vengono fatte sicuramente (ad esempio grazie all'usura dei vecchi prodotti).

Assumiamo come costanti entrambe queste grandezze, sotto questa assunzione possiamo definire Y nel modo seguente:

$$\frac{dY}{dt} = pX - u$$

Per analizzare questo nuovo problema decidiamo di approssimare le funzioni S e I con rispettivamente un polinomio di terzo grado (per simulare la curva) e una retta per simulare l'intersezione in tre punti con la funzione S . In questa approssimazione la funzione S dipende soltanto dalla variabile X mentre I dipende sia da X che da Y .

$$\begin{aligned} S(X) &= 4(X - 50)^3 + 200000 \\ I(X, Y) &= 3000(X - 50) + 200000 - Y \end{aligned}$$

Anche X va modificato di conseguenza e diventa:

$$\frac{dX}{dt} = I(X, Y) - S(X)$$

Sostituendo a X la definizione di I e di S otteniamo:

$$\frac{dX}{dt} = 3000(X - 50) - 4(X - 50)^3 - Y$$

In seguito ad uno spostamento della variabile Y quello che succede alla retta I è una semplice traslazione, in alto se Y decresce ($pX(t) < u$) mentre in basso se Y

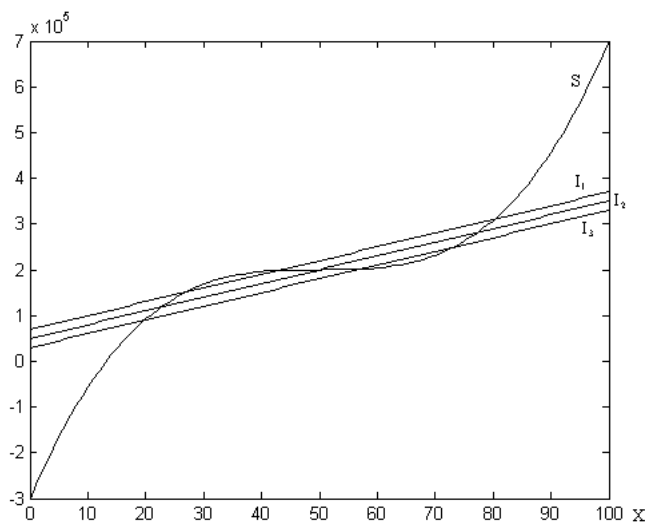


Figura 1.2: *Variazione di I rispetto a Y*

crebbe ($pX(t) > u$). In figura 1.2 possiamo notare graficamente questo fenomeno dove I_2 può variare in I_1 o in I_3 a seconda della variabile Y .

Con l'aumento di Y e la rispettiva diminuzione della retta I quello che succede è che cambiano i punti di equilibrio di X . I punti rispettivamente di medio e alto equilibrio si avvicinano tanto più che Y aumenta fino a quando non si arriva ad un punto critico (il punto di tangenza) dove un piccolo spostamento fa crollare il sistema al punto di equilibrio basso.

Con la diminuzione di Y si ottiene un processo inverso a quello descritto precedentemente, sono i punti di basso e medio equilibrio ad avvicinarsi fino a quando non si raggiunge un altro punto di tangenza dove un piccolo spostamento fa risollevare il sistema al punto di equilibrio alto.

Andiamo adesso a studiare la stabilità del sistema.

Capitolo 2

Equilibri e Stabilità

2.1 Punti di equilibrio

I punti di equilibrio del sistema sono quei punti dove entrambe le funzioni $\frac{dX}{dt}$ e $\frac{dY}{dt}$ sono uguali a 0, ovvero dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3000 \times (X - 50) - 4 \times (X - 50)^3 - Y = 0 \\ pX - u = 0 \end{cases}$$

ricavando X dalla seconda equazione e sostituendo nella prima otteniamo:

$$\begin{cases} Y = -4 \left(\frac{u}{p}\right)^3 + 600 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 27000\frac{u}{p} + 350000 \\ X = \frac{u}{p} \end{cases} \quad (2.1)$$

L'equazione (2.1) ci dice che il punto di equilibrio del sistema è soltanto uno ed è parametrico rispetto alle grandezze p e u definite precedentemente.

2.2 Stabilità del sistema

Lo studio della stabilità del sistema è ricondotto allo studio del segno e delle realtà degli autovalori della matrice jacobiana così definita:

$$\begin{bmatrix} 3000 - 12 \times (X - 50)^2 & -1 \\ p & 0 \end{bmatrix}$$

sostituendo ad X il punto di equilibrio otteniamo:

$$\begin{bmatrix} 3000 - 12 \times \left(\frac{u}{p} - 50\right)^2 & -1 \\ p & 0 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$\begin{bmatrix} -12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 + 1200\frac{u}{p} - 27000 & -1 \\ p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Calcolando gli autovalori della matrice (2.2) otteniamo la seguente equazione in funzione di λ :

$$\left(-12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 + 1200\frac{u}{p} - 27000 - \lambda\right)(-\lambda) + p = 0$$

ovvero:

$$\lambda^2 + \left(12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000\right)\lambda + p = 0$$

calcoliamo il Δ e otteniamo:

$$\Delta = \left(12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000\right)^2 - 4p$$

le cui soluzioni risultano:

$$\pm\lambda = \frac{-\left(12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000\right) \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (2.3)$$

Studiando la realtà della funzione (2.3) osserviamo che Δ è positivo e gli autovalori sono reali se vale:

$$\left(12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000\right)^2 > 4p$$

inoltre, considerando che il quadrato è un valore sempre positivo e p è sempre positivo per definizione di produttività, il valore assoluto del quadrato della differenza tra queste due misure è minore del valore assoluto di $12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000$ quindi gli autovalori sono concordi.

Gli autovalori sono positivi, e quindi il punto di equilibrio è instabile, se:

$$12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000 < 0 \quad (2.4)$$

da cui otteniamo:

$$\frac{1200 - 120\sqrt{10}}{24} < \frac{u}{p} < \frac{1200 + 120\sqrt{10}}{24}$$

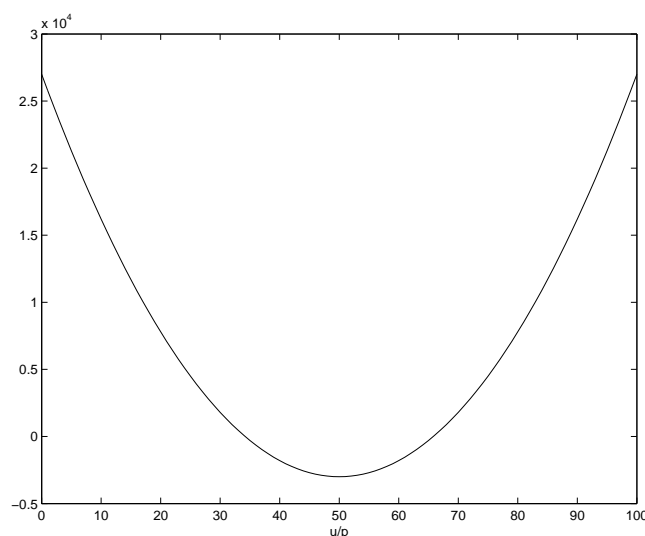


Figura 2.1: Andamento della funzione $12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000$

mentre se $\frac{u}{p}$ risulta fuori da questo intervallo gli autovalori sono negativi e il sistema ha stabile nodale (figura 2.1).

Se Δ è negativo gli autovalori sono immaginari, ciò avviene se vale:

$$\left(12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200\frac{u}{p} + 27000\right)^2 < 4p$$

ovvero per valori di p molto grandi. Osservando il grafico del primo termine (figura 2.2) notiamo che nell'intervallo $30 < \frac{u}{p} < 40$ e nell'intervallo $60 < \frac{u}{p} < 70$ sono sufficienti valori di p relativamente piccoli (sull'ordine di 10^5) per far sì che Δ sia negativo.

Nel caso di autovalori complessi dobbiamo studiare il segno della parte reale, che ancora una volta dipende da (2.4) ovvero gli autovalori sono positivi, e quindi instabili, se sono compresi nell'intervallo:

$$\frac{1200 - 120\sqrt{10}}{24} < \frac{u}{p} < \frac{1200 + 120\sqrt{10}}{24}$$

altrimenti la parte reale è negativa e il sistema ha stabilità focale.

Quando il sistema risulta instabile, sia nel caso di una instabilità focale che nodale, il sistema non tende a raggiungere valori infiniti ma si mantiene su un *ciclo limite* e questo vale per ogni valore che possiamo dare a p e a u . L'interpretazione fisica che possiamo associare a questo comportamento è dovuta al fatto che qualunque sia la produttività e la quantità media di prodotti venduti non ha senso investire una quantità infinita di denaro perché andremmo incontro a una sicura rimessa.

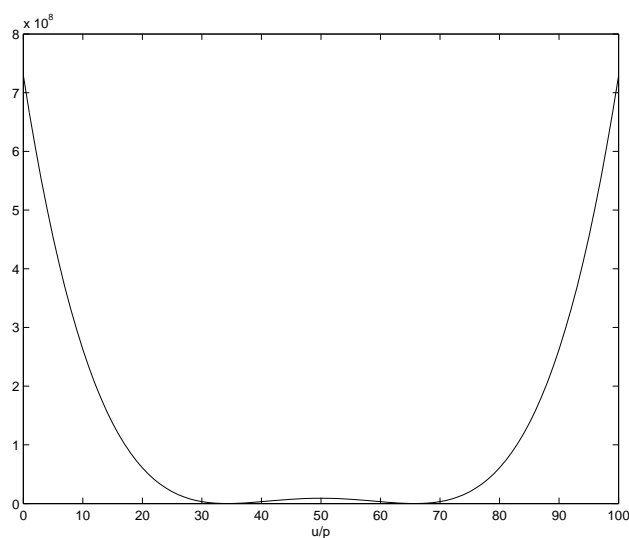


Figura 2.2: *Andamento della funzione* $\left(12 \left(\frac{u}{p}\right)^2 - 1200 \frac{u}{p} + 27000\right)^2$

Nel prossimo capitolo vedremo se le simulazioni numeriche basate su questo modello soddisfano le proprietà analitiche di cui abbiamo parlato.

Capitolo 3

Sperimentazione

La sperimentazione del sistema è stata fatta utilizzando un simulatore numerico basato sull'algoritmo di *Eulero* e scritto in *Haskell*, mentre i grafici sono stati prodotti con l'aiuto di *Matlab*.

3.1 Sistema stabile

Iniziamo le sperimentazioni studiando i due casi in cui il sistema risulta stabile ovvero quando gli autovalori della matrice (2.2) sono entrambi negativi. Il punto iniziale considerato è $(55, 0)$

Nel primo caso i valori di p e u sono rispettivamente 300 e 10000 quindi abbiamo che il punto di equilibrio corrisponde a circa $(\frac{1}{3}, -31481)$ mentre gli autovalori sono reali e negativi. Questo esperimento è raffigurato nelle figure 3.1, 3.2 e 3.3.

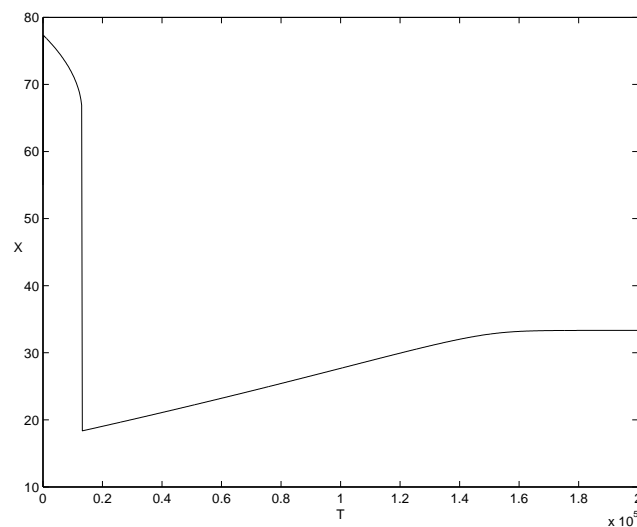


Figura 3.1: *Andamento del sistema stabile con autovalori reali rispetto a X e t*

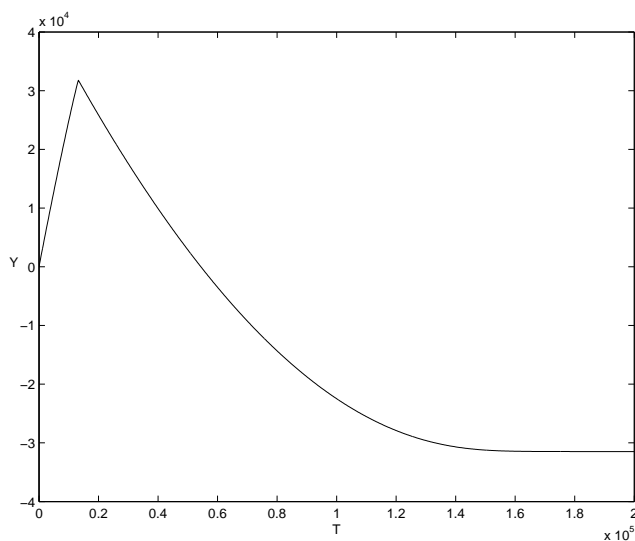


Figura 3.2: *Andamento del sistema stabile con autovalori reali rispetto a Y e t*

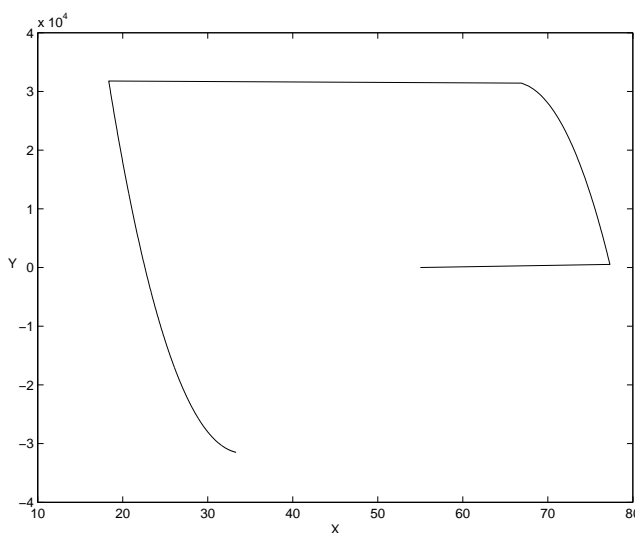


Figura 3.3: *Andamento del sistema stabile con autovalori reali rispetto a X e Y*

Nel secondo caso i valori di p e u sono rispettivamente 100000 e 3300000 quindi abbiamo che il punto di equilibrio corrisponde a $(33, -31348)$ mentre gli autovalori sono immaginari con la parte reale negativa. Questo esperimento è raffigurato nelle figure 3.4, 3.5 e 3.6.

In questo secondo esperimento la convergenza al punto di equilibrio è focale, ma dai grafici non viene evidenziata questa proprietà. La causa è dovuta dall'ampiezza della spirale molto piccola (sull'ordine di 10^{-3}) e che quindi non viene catturata nella rappresentazione grafica.

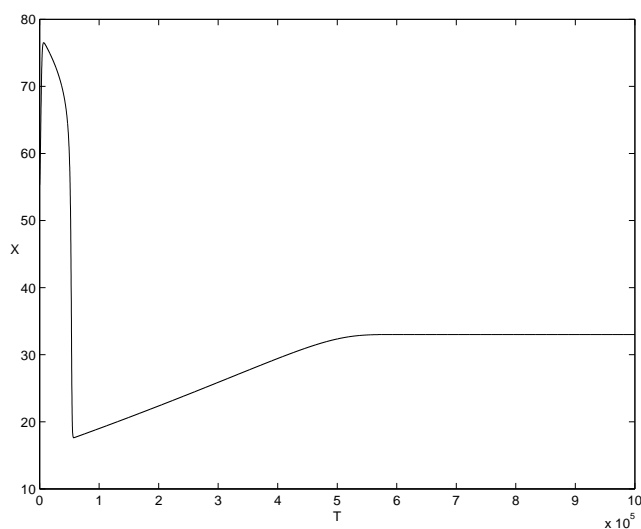


Figura 3.4: *Andamento del sistema stabile con autovalori immaginari rispetto a X e t*

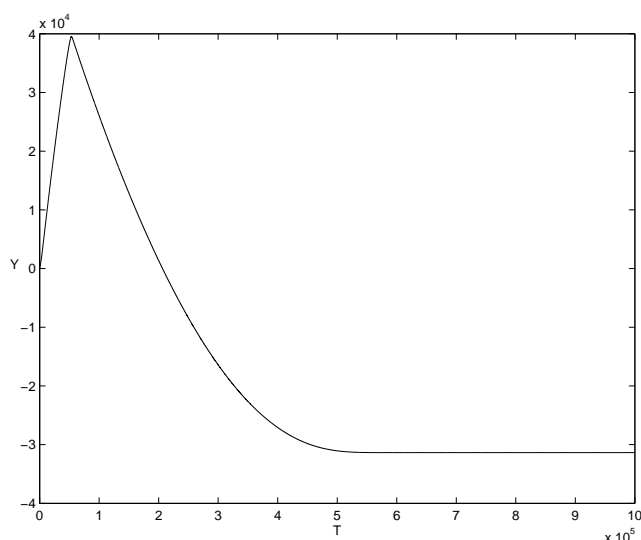


Figura 3.5: *Andamento del sistema stabile con autovalori immaginari rispetto a Y e t*

3.2 Sistema instabile

In questa seconda serie di sperimentazioni studiando due casi in cui il sistema risulta instabile ovvero quando gli autovalori della matrice (2.2) sono entrambi positivi. Il punto iniziale considerato è $(55, 0)$

Nel primo caso i valori di p e u sono rispettivamente 200 e 10000 quindi abbiamo che il punto di equilibrio corrisponde a circa $(50, 0)$ mentre gli autovalori

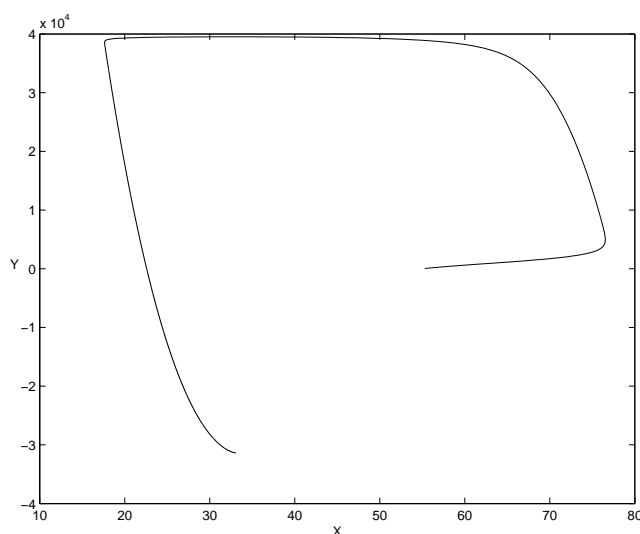


Figura 3.6: *Andamento del sistema stabile con autovalori immaginari rispetto a X e Y*

sono reali e positivi. Questo esperimento è raffigurato nelle figure 3.7, 3.8 e 3.9.

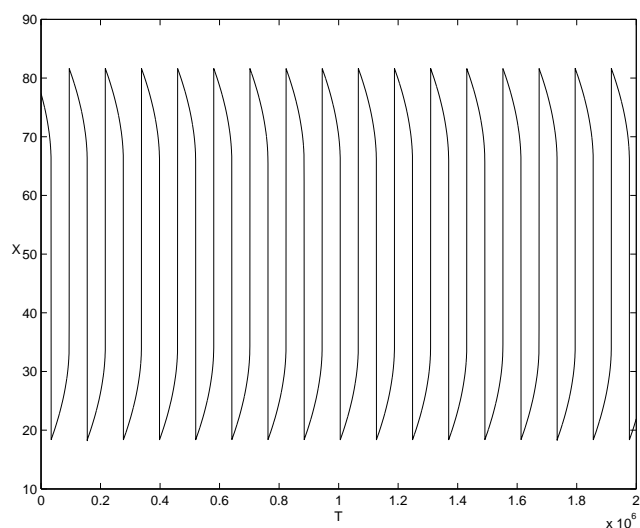


Figura 3.7: *Andamento del sistema instabile con autovalori reali rispetto a X e t*

Nel secondo caso i valori di p e u sono rispettivamente 200000 e 7000000 quindi abbiamo che il punto di equilibrio corrisponde a circa $(35, -31500)$ mentre gli autovalori sono immaginari con la parte reale positiva. Questo esperimento è raffigurato nelle figure 3.10, 3.11 e 3.12.

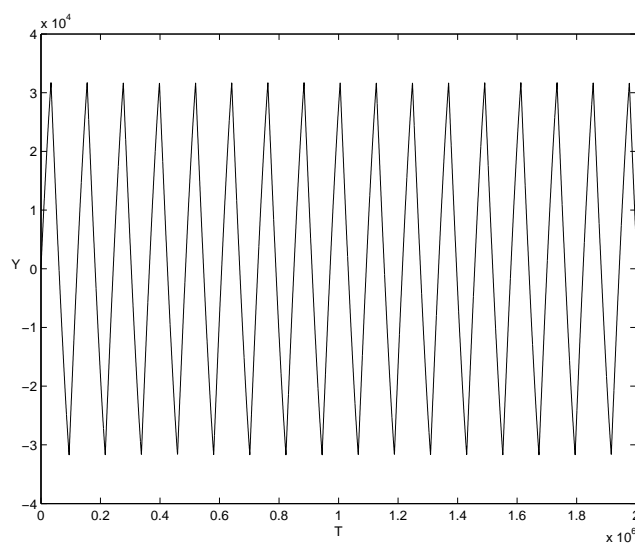


Figura 3.8: *Andamento del sistema instabile con autovalori reali rispetto a Y e t*

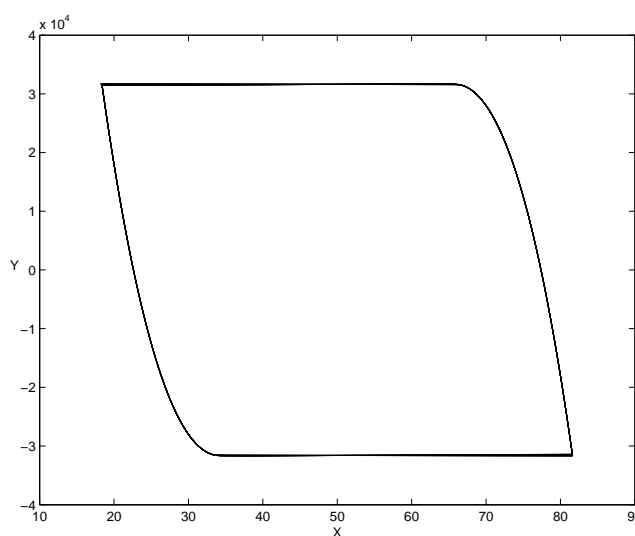


Figura 3.9: *Andamento del sistema instabile con autovalori reali rispetto a X e Y*

3.3 Simulazione dell'economia

In quest'ultima sperimentazione simuleremo una diminuzione della quantità media di prodotti venduti u lasciando inalterata la produttività p .

Come valori per p e u scegliamo rispettivamente 2000 e 180000 quindi abbiamo che il punto di equilibrio corrisponde a $(90, -136000)$ e gli autovalori sono negativi quindi il sistema è stabile.

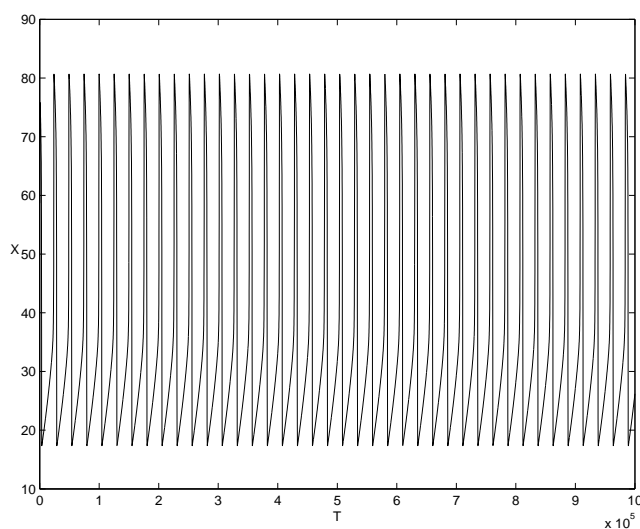


Figura 3.10: *Andamento del sistema instabile con autovalori immaginari rispetto a X e t*

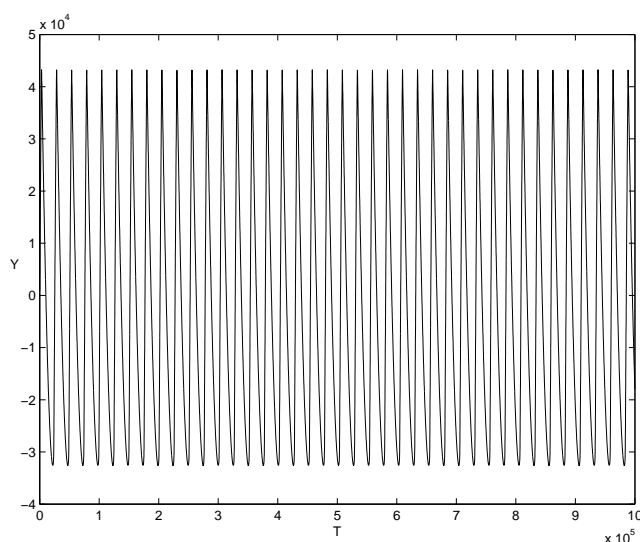


Figura 3.11: *Andamento del sistema instabile con autovalori immaginari rispetto a Y e t*

A tempo $t = 2000000$ decidiamo di diminuire u fino a portarlo a 120000 quindi il punto di equilibrio diventa $(60, 26000)$ e gli autovalori sono positivi, quindi il sistema diventa instabile.

Infine, a tempo $t = 4000000$ decidiamo di diminuire ulteriormente u fino a portarlo a 50000 quindi il punto di equilibrio diventa $(25, -12500)$ e gli autovalori sono negativi, quindi il sistema ritorna stabile.

Anche in questo sperimento il punto iniziale considerato è $(55, 0)$ e i grafici

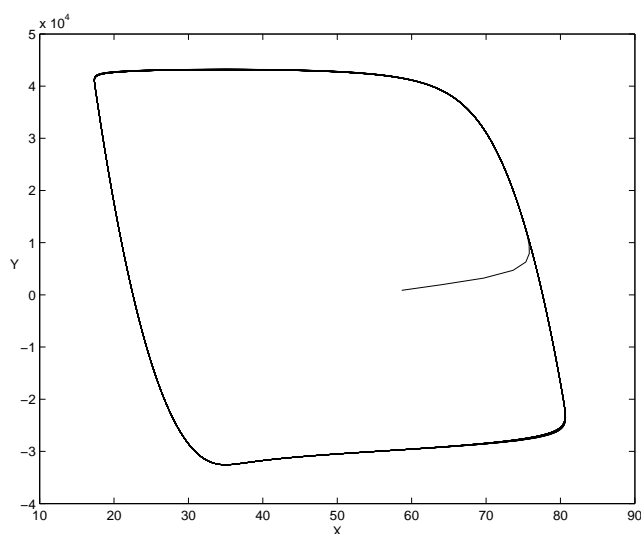


Figura 3.12: *Andamento del sistema instabile con autovalori immaginari rispetto a X e Y*

sono rappresentati nelle figure 3.13, 3.14 e 3.15.

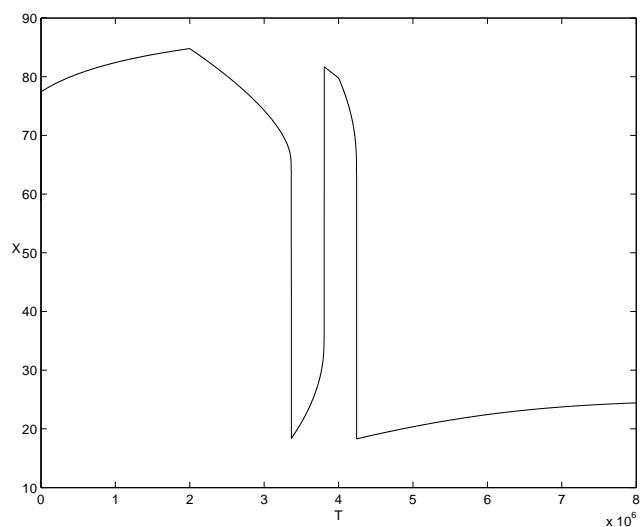


Figura 3.13: *Andamento del sistema economico rispetto a X e t*

Con questo esperimento riusciamo a capire come funziona un sistema economico, inizialmente l'economia è stabile e quindi tende a un punto di equilibrio. Dopo un po' di tempo diventa instabile e inizia ad oscillare, in questo periodo si alternano momenti con molta occupazione a momenti con una bassa percentuale di occupazione. Infine l'economia si ristabilizza e riprende a tendere ad un punto

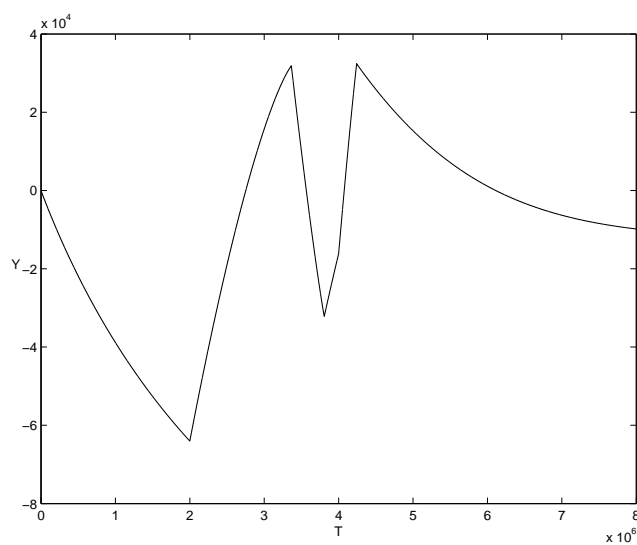


Figura 3.14: *Andamento del sistema economico rispetto a Y e t*

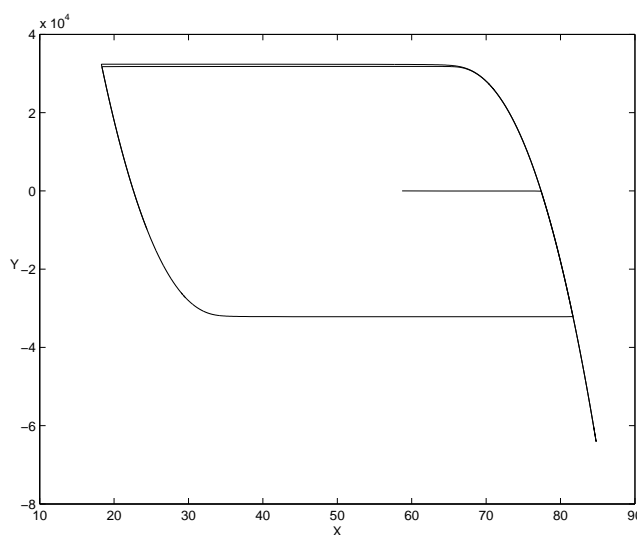


Figura 3.15: *Andamento del sistema economico rispetto a X e Y*

di equilibrio per un altro periodo più o meno lungo per poi ristabilizzarsi in un ciclo infinito tra stabilità e instabilità.

Bibliografia

[Kal40] Nicholas Kaldor. A Model of the Trade Cycle, March 1940.

[Kal57] Nicholas Kaldor. A Model of Economic Growth, Dec 1957.

Appendice A

Codice del simulatore

Questo appendice presenta il codice che ho scritto per il simulatore numerico. Il linguaggio utilizzato è *Haskell*.

```
import System.IO

p :: Double
p = 2000

u :: Double
u = 50000

campione :: Int
campione = 100

eulero :: (Double -> Double -> Double, Double -> Double
          -> Double) -> [(Integer, Double, Double)] -> Double
          -> Integer -> [(Integer, Double, Double)]
eulero (f, g) ((t, x, y):xs) dt 0 =
    ((t, x, y):xs)
eulero (f, g) ((t, x, y):xs) dt (n+1) =
    eulero (f, g) ((t+1, x + dt * f x y, y + dt *
                    g x y):((t, x, y):xs)) dt n

lavoro :: Double -> Double -> Double
lavoro x y =
    -4 * x^3 + 600 * x^2 - 27000 * x + 350000 - y

invenduto :: Double -> Double -> Double
invenduto x y =
    p * x - u
```

```
formatta :: Show a => [a] -> [Char]
formatta s = concat (map (flip (++) "\n") (map show
    s))

campiona :: [a] -> Int -> [a]
campiona [] _ = []
campiona x 0 = x
campiona (x:xs) i = x:(campiona (drop i xs) i)

visualizza :: Show a => [a] -> IO ()
visualizza = (appendFile "file_risultato.txt") .
    formatta . reverse . (flip campiona campione)

main = visualizza(eulero (lavoro, invenduto) [(0, 55,
    0)] 0.000002 2000000)
```