Le equazioni algebriche dai greci in poi

Ornella Menchi

Dipartimento di Informatica

Problema centrale della matematica

- Uno dei problemi centrali affrontati dai matematici di ogni tempo è stato quello di calcolare le soluzioni di equazioni.
- Esempi di risoluzione di equazioni lineari sono riportati in un papiro egiziano risalente al 1650 a.C.
- In tavolette babilonesi sono descritti metodi per risolvere alcune equazioni di secondo e terzo grado.
- Dal mondo greco ci arrivano i tre famosi problemi dell'antichità: la duplicazione del cubo, la trisezione dell'angolo e la quadratura del cerchio.
- I primi due portano a equazioni di terzo grado. Il terzo che equivale a determinare π, porta a un'equazione trascendente.

La duplicazione del cubo

- Nel 430 a.C. infuriava ad Atene una tremenda pestilenza. Gli Ateniesi si recarono a Delo per interrogare l'oracolo, che rispose che l'ira del dio Apollo si sarebbe placata solamente se il suo altare, di forma cubica, fosse stato raddoppiato.
- Gli Ateniesi fecero costruire un altare di forma cubica e di lato doppio rispetto al primo. Ma la pestilenza continuava, per cui gli Ateniesi interrogarono di nuovo l'oracolo che rispose che il cubo ottenuto aveva volume non doppio, ma ben otto volte quello originale.
- Nella nostra notazione simbolica, questo vorrebbe dire che il lato del cubo dovrebbe essere moltiplicato per un fattore x tale che $x^3 = 2$.
- Per fortuna la pestilenza cessò prima che il nuovo altare fosse costruito, perché questo problema non può essere risolto con riga e compasso, secondo le regole della geometria classica.

La rappresentazione dei numeri

- Nello sviluppo della matematica un ruolo fondamentale è stato svolto dalla rappresentazione dei numeri. In generale i numeri sono stati rappresentati con combinazioni di cifre espresse in opportune basi.
- La base 10 ha avuto alla fine il sopravvento sulle altre basi perché era quella usata dai romani, che per alcuni secoli dominarono militarmente ed economicamente il mondo occidentale. Era un sistema facile da comprendere, che faceva uso di pochissimi simboli e per il quale erano stati inventati efficaci algoritmi di calcolo su abaco.
- La base 60 dei babilonesi, che era molto più sofisticata, consentiva una parziale notazione posizionale, adatta per il calcolo tecnico e scientifico. Per questo fu utilizzata dagli scienziati (ad esempio Tolomeo). È stata acquisita nelle nostre misure del tempo e degli angoli.

La matematica babilonese

- Le tavolette di argilla rinvenute testimoniano dell'alto livello di conoscenze matematiche dei babilonesi.
- Già dal 2000 a.C. possedevano le tabelle dei quadrati, dei cubi e dei reciproci degli interi, con cui calcolavano moltiplicazioni, divisioni fra interi ed estrazione di radici quadrate. Sapevano risolvere equazioni di secondo grado della forma

$$x^2 + bx = c \quad \text{e} \quad x^2 - bx = c,$$

con i coefficienti b e c positivi non necessariamente interi. La necessità di considerare l'equazione nelle due forme distinte deriva dal fatto che i babilonesi non avevano i numeri negativi.
- Mediante le tabelle dei quadrati e dei cubi i babilonesi riuscivano anche ad approssimare le soluzioni delle equazioni di terzo grado della forma

$$ax^3 + bx^2 = c$$

con a, b e c positivi.

La matematica greca classica (6° secolo a.C. – 323 a.C.)

- La matematica greca classica si sviluppò in numerosi centri, in ognuno dei quali un gruppo di allievi portava avanti gli studi sotto la guida di un maestro (Talete a Mileto, Pitagora a Crotone).
- Il nucleo geometrico iniziale, basato sulla commensurabilità, dovette necessariamente essere ampliato all'incommensurabilità quando si scoprì che il rapporto fra la diagonale e il lato di un quadrato non è un numero razionale (nel liguaggio delle equazioni, che l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ammette soluzione razionale). Questa scoperta è attribuita ad Ippaso di Metaponto, della scuola di Pitagora.
- La reazione dei pitagorici fu durissima: Ippaso fu bandito e gli fu costruito, quantunque ancora in vita, un monumento funebre. La leggenda, ripresa da Proclo, narra che per la sua empietà Ippaso morì poco tempo dopo vittima di un naufragio.

Il periodo ellenistico (323 a.C. – 6° secolo)

- Il periodo classico termina con la morte di Alessandro Magno nel 323 a.C. ed è seguito dal periodo ellenistico.
- L'impero si disgregò a causa delle lotte fra i suoi generali. La provincia egiziana fu assegnata a Tolomeo I, che scelse come capitale Alessandria e vi creò un ambiente favorevole al fiorire delle arti e delle scienze.
- Ad Alessandria Euclide (325-265 a.C.), compilò con i suoi *Elementi* il primo trattato scientifico, in cui un metodo rigorosamente deduttivo fa discendere ogni proposizione da proposizioni precedentemente stabilite, a partire da un nucleo iniziale di assiomi.
- Ad Alessandria operarono: Apollonio di Perga (262-190 a.C., *Le coniche*), Tolomeo (100-175, *L'Almagesto*), Diofanto (200-284, *Arithmetica*), Pappo (290-350, *Collezione*).

Archimede

- A Siracusa operò Archimede (287-212 a.C.), considerato da molti storici della matematica come uno dei più grandi matematici di tutti i tempi. Plutarco, descrivendo l'assedio di Siracusa da parte dei romani durante la seconda guerra punica, ci dice che Archimede inventò ingegnose macchine da guerra per tenere lontano il nemico. Durante il saccheggio della città, Archimede venne trucidato da un soldato romano, nonostante che il generale Marcello avesse dato l'ordine di salvargli la vita.
- Con il metodo di esaustione dimostrò che l'area del cerchio è uguale a quella di un triangolo rettangolo che abbia come lati la circonferenza e il raggio del cerchio stesso. Partendo dall'esagono regolare inscritto, Archimede calcolò i perimetri dei poligoni ottenuti raddoppiando il numero dei lati, fino ad ottenere $3 + 10/71 < \pi < 3 + 1/7$, cioè $3.14085 < \pi < 3.14286$.

Gli arabi (8° – 12° secolo)

- Il concetto di equazione, come lo intendiamo oggi, nasce e si sviluppa nel mondo arabo.
- Al-Khuwarizmi (790-850) distingue sei tipi di equazioni di primo e secondo grado formate dalle tre quantità radici, quadrati e numeri:
  1. quadrati uguali a radici: $x^2 = x$,
  2. quadrati uguali a numeri: $x^2 = a$,
  3. radici uguali a numeri: $x = a$,
  4. quadrati e radici uguali a numeri: $x^2 + ax = b$,
  5. quadrati e numeri uguali a radici: $x^2 + a = bx$,
  6. quadrati uguali a radici e numeri: $x^2 = ax + b$,

  in cui ai parametri a e b sono forniti valori positivi.
- Per ogni equazione al-Khuwarizmi dà la regola per calcolare la soluzione positiva.

Gli arabi (8° – 12° secolo)

- Omar Khayyam, *Trattato sulla dimostrazione dei problemi di algebra* (1070) Samarcanda.
- Trasformazione dei problemi geometrici in problemi algebrici, ottenendo equazioni di terzo grado, per cui vengono proposte soluzioni geometriche o numeriche approssimate.
- Khayyam stabilisce che l'equazione di terzo grado può essere risolta usando le coniche, ma non è risolvibile servendosi esclusivamente di riga e compasso, in tal modo anticipando un risultato di 750 anni dopo.

Fibonacci (1170 – 1250)

- La rappresentazione posizionale dei numeri richiede l'uso di un carattere speciale per lo zero. Già i babilonesi avevano introdotto un simbolo speciale per lo spazio vuoto fra cifre, ma mai in posizione estrema. Invece la notazione sessagesimale usata da Tolomeo nell'Almagesto ha lo zero, sia in posizione intermedia che terminale.
- L'acquisizione della notazione posizionale con le nove cifre e lo zero da parte del mondo occidentale deve attendere fino al 13° secolo (Leonardo Pisano, detto Fibonacci, Liber Abaci, 1202).
- Ma il principale vantaggio della notazione posizionale, cioè la sua applicabilità alle frazioni, continua a sfuggire. Anche Fibonacci usa le frazioni a numeratore unitario, così la frazione $98/100$ viene trasformata in $1/100 + 1/50 + 1/5 + 1/4 + 1/2$ e la frazione $99/100$ viene trasformata in $1/25 + 1/5 + 1/4 + 1/2$.

La Summa di Luca Pacioli (1445 – 1510)

- Negli ultimi due capitoli del Liber Abaci vengono descritti i metodi di falsa posizione (già utilizzato dagli egizi) e doppia falsa posizione (introdotto dagli arabi) per risolvere le equazioni di primo e secondo grado.
- Nel 1494 appare la prima edizione della *Summa de arithmetica, geometria, ...* di Luca Pacioli che comprende la soluzione canonica delle equazioni di primo e di secondo grado.
- Sebbene sia priva della notazione esponenziale, presenta un largo uso di notazioni abbreviate: *ae* per aequalis, *p* e *m* per somma e sottrazione, R_v per radice, *co* per cosa (cioè l'incognita), *ce* per censo (il quadrato dell'incognita), *cece* per quarta potenza dell'incognita. Ad esempio

$$1.co.m.R_v.1.ce.m.36 \quad \text{sta per} \quad x - \sqrt{x^2 - 36}.$$

L'equazione di terzo grado

- All'inizio del 1500 gli algebristi italiani avevano già elaborato algoritmi per calcolare le radici cubiche e quindi per risolvere equazioni della forma $x^3 = k$. I tempi erano maturi per trovare la formula risolutiva dell'equazione di terzo grado.
- La storia della costruzione di questa formula è documentata e costituisce un vero romanzo, con tanti protagonisti: in particolare Niccolò Fontana, detto Tartaglia a causa della balbuzie provocata da una sciabolata ricevuta durante l'assalto di Brescia da parte di truppe francesi nel 1512, che lo aveva reso inadatto all'insegnamento, e Gerolamo Cardano, figlio illegittimo, astrologo e giocatore incallito, professore di matematica a Bologna e a Milano.

L'equazione di terzo grado

- Nel 1526, ormai in fin di vita, Scipione Del Ferro, che era stato professore di matematica all'Università di Bologna, comunicò a Flor, suo allievo, la formula risolutiva parziale dell'equazione di terzo grado, che aveva scoperto fin dal 1515, ma che aveva sempre tenuta nascosta.
- Flor non fece mistero di questa conoscenza e Tartaglia, che già lavorava al problema, stimolato da questa voce, riuscì a trovare anche lui una formula risolutiva e diffuse la notizia.
- Il 22 febbraio 1535 venne indetta una disfida matematica fra Flor e Tartaglia, in cui ciascun contendente proponeva all'altro trenta problemi da risolvere in un certo tempo. Quando arrivò il giorno stabilito, Tartaglia aveva risolto tutti i problemi proposti da Flor, mentre Flor non aveva risolto neppure uno dei problemi proposti da Tartaglia.

L'equazione di terzo grado

- Venuto a sapere della vittoria su Flor, Cardano invitò Tartaglia a recarsi da lui a Milano, con la promessa di trovargli un mecenate. Tartaglia, che non aveva fonti di reddito stabili, accettò l'invito e rivelò a Cardano la formula che aveva trovata, facendogli giurare che non l'avrebbe pubblicata, perché intendeva farsi un nome con la pubblicazione in un suo trattato di algebra.
- In attesa che questo trattato vedesse la luce, Cardano e un suo allievo Ferrari lavorarono sulla formula, ne dettero una dimostrazione rigorosa e Ferrari riuscì a estendere la formula al caso dell'equazione di quarto grado.
- Erano ormai passati sei anni e Cardano, che diventava sempre più impaziente, si recò a trovare Annibale della Nave, genero di Del Ferro e suo successore alla cattedra di Bologna.

L'equazione di terzo grado

- Cardano riuscì a farsi mostrare il manoscritto originale di Del Ferro, in cui era annotata la formula risolutiva.
- A questo punto Cardano si sentì svincolato dal giuramento che aveva fatto a Tartaglia e nel 1545 pubblicò la sua opera *Artis Magnae sive de regulis algebraicis*, in cui forniva le soluzioni delle equazioni di terzo e quarto grado. In essa comunque era correttamente attribuita la paternità delle formule rispettivamente a Del Ferro, a Tartaglia e a Ferrari.
- Questo però non bastò a Tartaglia, che pure aveva pubblicato, come se fossero opera sua, risultati di altri matematici suoi contemporanei senza dichiararne la fonte.

- Tartaglia andò su tutte le furie e offese pubblicamente Cardano, chiamandolo "homo di poco sugo". Ferrari intervenne in difesa del suo maestro con una disfida matematica e riuscì a umiliare Tartaglia.
- Tartaglia uscì così di scena, mentre Cardano e Ferrari divennero famosi, ma anche loro non ebbero grande fortuna. Un figlio di Cardano fu condannato a morte per l'assassinio della moglie, un altro suo figlio lo derubò per saldare i suoi debiti di gioco. Il Cardano stesso fu imprigionato come eretico per aver calcolato l'oroscopo di Gesù Cristo. Ferrari, dopo aver perso le dita di una mano in una rissa, morì avvelenato, probabilmente da una sorella per una questione di eredità.

La formula di Tartaglia

- La formula che Tartaglia comunicò a Cardano per il caso $x^3 + px = q$ era espressa sotto forma di poesia

Quando che'l cubo con le cose appresso *Se agguaglia a qualche numero discreto*	$x^3 + px = q$
Trovami dui altri differenti in esso	$u - v = q$
Dapoi terrai questo per consueto *Che'l lor produtto sempre sia eguale* *Al terzo cubo delle cose netto*	$uv = (p/3)^3$
El residuo poi suo generale *Delli lor lati cubi ben sottratti* *Varrà la tua cosa principale*	$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = x$

- Per le equazioni di secondo grado, gli algebristi avevano potuto evitare i numeri complessi semplicemente dicendo che certe equazioni non avevano soluzione.
- Con le equazioni di terzo grado la situazione cambiò: se le tre radici dell'equazione erano reali, la formula risolutiva portava a radici quadrate di numeri negativi. Cardano non riuscendo a trattare questo caso, concludeva che il suo risultato era "tanto sottile quanto inutile".
- A questo punto entra in scena un altro algebrista italiano, Bombelli (*Algebra*, 1572), che introduce i numeri complessi, definendo i simboli *più di meno* per $+i$ e *meno di meno* per $-i$ (che chiamava *quantità silvestri*).

Viète

- Alla metà del 16° secolo il mondo matematico era pronto per un grande balzo in avanti.
- La diffusione della notazione decimale per i numeri frazionari in sostituzione delle frazioni sessagesimali per merito di Viète (francese) e di Stevino (fiammingo), e l'invenzione dei logaritmi da parte di Nepero (scozzese) e di Briggs (inglese), fornirono gli strumenti agli astronomi che, come Keplero (tedesco), avevano a che fare con grandi quantità di dati.
- Una nuova agile notazione simbolica consentiva di svincolarsi dalla trattazione dei casi particolari. Fu introdotto l'uso delle lettere per indicare i dati supposti noti, le variabili e i parametri, i simboli per le operazioni aritmetiche, il segno $=$ e i segni di $<$ e $>$, la notazione degli esponenti per le potenze.
- La figura centrale di questo periodo fu Viète (1540-1603).

Quali e quante soluzioni? (18° secolo)

- La scoperta della formula risolutiva per le equazioni di terzo e quarto grado aveva aperto la strada alla ricerca di formule risolutive per le equazioni di grado più alto.
- I matematici erano convinti che un'equazione di grado n dovesse avere n soluzioni. Non era però chiaro quale forma dovessero avere le soluzioni, potevano magari appartenere anche a campi più vasti di quello complesso.
- Nel 1746 d'Alembert cercò di dimostrare che le soluzioni dovessero appartenere al campo complesso, ma la sua dimostrazione era incompleta. Nel 1749 Eulero affrontò, senza concluderlo, il caso delle equazioni di grado $n \leq 6$. Nel 1772 Lagrange cercò di colmare le lacune della dimostrazione di Eulero, ma sempre supponendo che un'equazione di grado n avesse comunque n radici di un qualche tipo. Nel 1795 Laplace dimostrò in modo molto elegante, che le radici, se esistono, sono complesse.

Il teorema fondamentale dell'algebra (19° secolo)

- Rimaneva il problema di fondo di dimostrare il cosiddetto *teorema fondamentale dell'algebra* che afferma che ogni equazione di grado n a coefficienti complessi possiede n radici.
- La prima dimostrazione rigorosa del teorema per il caso di un polinomio di grado n a coefficienti reali è dovuta a Gauss, nella sua tesi di dottorato del 1799. Gauss aveva allora 21 anni.
- Nel 1806 Argand pubblicò una dimostrazione del teorema per il caso generale dei coefficienti complessi.
- Nel 1821 Cauchy riprese la dimostrazione di Argand nel suo *Cours d'analyse* ..., senza citarne l'autore.
- Nel 1816, Gauss pubblicò due nuove dimostrazioni, e un'altra ancora nel 1850.
- Successivamente sono state proposte molte dimostrazioni diverse.

L'equazione di quinto grado

- Per la risoluzione dell'equazione di quinto grado si cercò una formula risolutiva per radicali, simile a quelle che avevano funzionato per le equazioni fino al quarto grado, cioè una formula che esprimesse le soluzioni per mezzo di operazioni razionali ed estrazioni di radice di vario indice.
- Dopo più di due secoli di tentativi infruttuosi si cominciò a pensare che forse una tale formula non esisteva.
- Nel 1770 Waring, Vandermonde e Lagrange, all'insaputa l'uno dell'altro, pubblicarono i loro risultati. I primi due erano pessimisti circa l'esistenza della formula risolutiva. Lagrange invece era ancora ottimista, anche perché Eulero aveva individuato una classe abbastanza ampia di equazioni di quinto grado che venivano risolte per radicali.

Ruffini (1765 – 1822)

- Nel 1799 entra in scena Paolo Ruffini, professore di matematica all'Università di Modena. Ruffini era anche medico e nel 1817 si ammalò di tifo durante un'epidemia e quasi ne morì. Si riprese solo parzialmente e dovette abbandonare la sua professione accademica.
- Ruffini pubblicò una corposa memoria di 500 pagine dal titolo *Teoria generale delle equazioni in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle soluzioni generali di grado superiore al quarto*. Ne mandò una copia a Lagrange ma non ottenne alcuna risposta, gliene spedì una seconda copia, ma Lagrange si limitò a fargli sapere che c'erano troppe imprecisioni nelle dimostrazioni.
- In effetti la dimostrazione di Ruffini conteneva una grossa lacuna, che non venne colmata neanche nelle successive cinque versioni semplificate.

Abel (1802 – 1829)

- Entra in scena Niels Hendrik Abel, la cui vita fu segnata dalla povertà dovuta alla crisi economica che aveva colpito la Norvegia all'inizio del 19° secolo. La morte del padre scaricò sulle spalle di Abel, all'epoca diciottenne, gran parte del peso della famiglia (aveva sei fratelli).
- Nel 1824 pubblicò una *Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébraique des équations génerales qui dépassent le quatrième degré*, in cui dimostrava la irrisolubilità per radicali dell'equazione di quinto grado. Abel non aveva una conoscenza diretta delle dimostrazioni di Ruffini, ma aveva invece letto un lavoro di Cauchy che era basato sul risultato di Ruffini, quindi si può pensare che Abel sia stato indirettamente influenzato da Ruffini.
- Poi con questo fascicoletto, pubblicato a sue spese, Abel si mise a viaggiare per l'Europa per avvicinare i grandi matematici e assicurarsi una qualche posizione accademica.

Abel (1802–1829)

- Gauss e Cauchy non presero in considerazione i suoi risultati. Cauchy addirittura ne perse la copia che gli era stata data.
- Abel continuò a girare l'Europa ma non trovò nulla che gli consentisse di continuare i suoi studi. Tornò in Norvegia. La sua vita di stenti lo aveva fatto ammalare di tubercolosi. Morì il 6 Aprile 1829, non ancora 27-enne. La quantità di lavoro che Abel era riuscito a completare in così pochi anni è giudicata straordinaria.
- Due giorni dopo la sua morte gli arrivò una lettera in cui gli veniva conferita una cattedra all'Università di Berlino.

Galois (1811 – 1832)

- L'ultimo risulato fondamentale sulla risolubilità delle equazioni si deve a Évariste Galois: un'equazione è risolubile per radicali se e solo se uno speciale gruppo ad essa associato è risolubile.
- Pur essendo un genio precoce della matematica, Galois fallì per due volte gli esami di ammissione all'Ècole Polytechnique. Nel frattempo aveva già fatto delle scoperte sensazionali raccolte in varie memorie che sottoponeva con scarsa fortuna ai matematici più famosi.
- All'età di diciassette anni mandò a Cauchy una sua prima memoria perché la presentasse all'Académie, ma Cauchy la smarrì. Né miglior sorte ebbe una sua seconda memoria inviata a Fourier, all'epoca segretario dell'Académie. Una terza memoria, presentata per il tramite di Poisson, gli fu restituita con il giudizio di incomprensibile.

- Ormai disilluso, Galois era anche perseguitato dalla giustizia per i suoi atteggiamenti rivoluzionari e fu ripetutamente incarcerato.
- Aveva appena vent'anni quando fu coinvolto in un duello combattuto, si disse per l'onore di una donna. Questa la versione ufficiale, mentre un'altra versione addossò la responsabilità del duello alla polizia segreta che avrebbe usato la motivazione dell'onore come copertura di un omicidio politico.
- Galois, che presentiva la sua fine, passò tutta la notte precedente a riassumere la sua teoria. La mattina successiva morì per un colpo di pistola all'addome e fu sepolto in una fossa comune.

La maledizione delle equazioni

- Ippaso di Metaponto che faceva parte della scuola pitagorica e teorizzò l'esistenza di quantità incommensurabili, fu dichiarato empio, bandito dalla scuola e morì poco tempo dopo vittima di un naufragio.
- Archimede venne trucidato da un soldato romano durante il saccheggio di Siracusa a seguito della seconda guerra punica, nonostante che il generale Marcello avesse dato l'ordine di salvargli la vita.
- Tartaglia era di umile estrazione e mentre cercava di riscattarsi da uno stato di povertà, insultò Cardano, perse ogni prestigio ad opera di Ferrari e sparì dalla scena.
- Cardano, che pure era uno stimato professore, visse una vita infelice a causa dei suoi figli. Venne incarcerato dall'Inquisizione per avere tentato di fare l'oroscopo di Cristo.

La maledizione delle equazioni

- Ferrari morì avvelenato, probabilmente dalla sorella per una questione di eredità.
- Ruffini contrasse il tifo e quasi ne morì. Non si rimise competamente e dovette rinunciare all'insegnamento.
- Abel morì povero a 29 anni, 2 giorni prima che gli arrivasse la comunicazione che gli era stato conferito un incarico accademico che lo avrebbe riscattato dalla sua povertà.
- Galois morì a 20 anni in un duello di cui non si è mai saputa veramente la ragione. Ma in tutta la sua breve vita aveva trascorso parecchio tempo in prigione per le sue idee politiche.