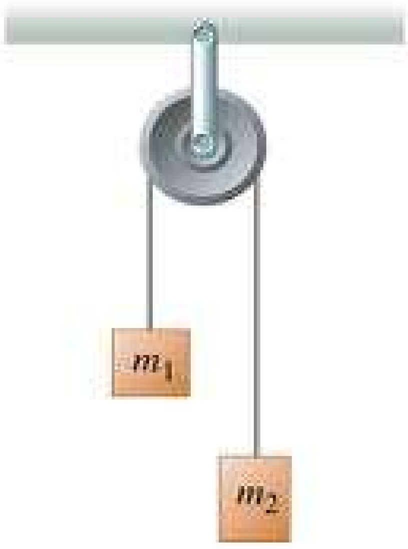
Simmetrie in fisica classica

Sergio Giudici
Dip. di Fisica,
Università di Pisa

Esempio 1 : La macchina di Atwood



Dispositivo inventato nel 1784 dal Rev. George Atwood a scopo didattico per lo studio del moto unif. accelerato.

Per scambio di m1 con m2

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

Accelerazione antisimmetrica

$$T = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

tensione del filo simmetrica

La valutazione delle simmetrie è una utilissima scorciatoia nel ragionamento e spesso consente di escludere rapidamente soluzioni sbagliate o ipotesi insensate.

Esempio 2: Una forza impossibile

Esistono in natura delle forze che dipendono dalla velocità

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

Forza di Lorentz agente su una carica in moto entro un campo magnetico

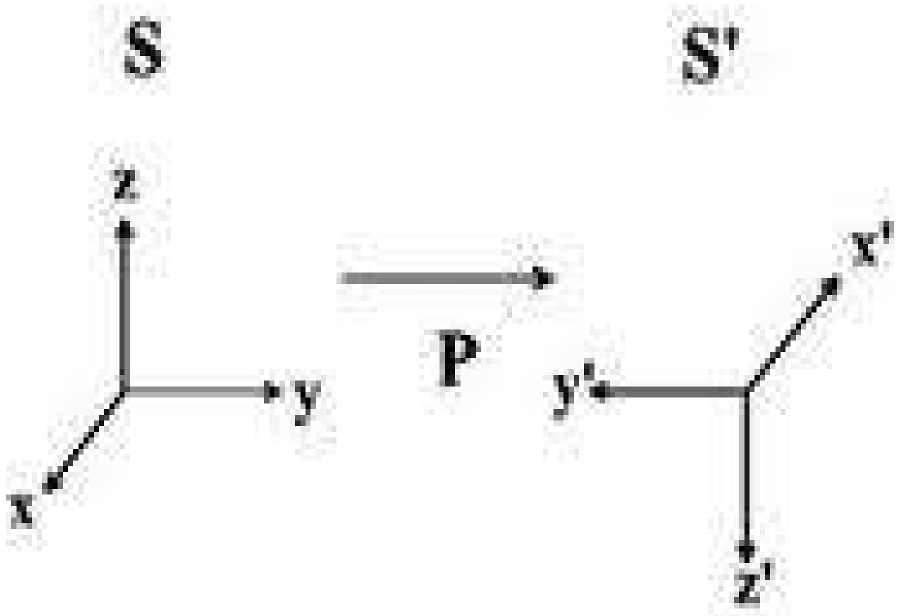
$$\vec{F} = -\eta\,\vec{v}$$

Forza di attrito causata dalla viscosità del mezzo. Perchè il segno - ?

Potrebbe esistere questa forza ?

$$\vec{F} = k\,\vec{v} \times \vec{r}$$

Riflessione spaziale



Prendiamo un sistema di riferimento e invertiamo tutti e tre gli assi.

I buoni vettori cambiano segno

$$\vec{r} \to -\vec{r}$$

$$\vec{v} \to -\vec{v}$$

$$\vec{a} \to -\vec{a}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \to -m\vec{a} = -\vec{F}$$

I buoni "scalari" <u>non</u> cambiano

$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 \to r^2$$

$$\frac{1}{2} m v^2 \to \frac{1}{2} m v^2$$

Esempio 2 : soluzione

$$\vec{r}\times\vec{v}\rightarrow\vec{r}\times\vec{v}$$

Il prodotto vettoriale tra due vettori
SEMBRA un vettore ma NON lo è:
PSEUDO-VETTORE

Gli PSEUDO VETTORI contagiano anche gli scalari !!!
Si può costruire uno seudo scalare partendo da 3 vettori buoni

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})\rightarrow-\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$\vec{F}=k\,\vec{v}\times\vec{r}$$

è impossibile perchè si uguaglierebbe un vettore buono ad uno pseudo vettore (ammesso che k sia uno scalare buono!!!)

Simmetrie e sintassi delle formule

La classificazione di enti numerici in scalari, pseudo-scalari, vettori e pseudo-vettori induce delle regole sintattiche nella formule.
Una formula è corretta se a sinistra e a destra dell'uguale ci sono quantità omogenee

Esempio: Forza di Lorentz completa

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

q = carica (scalare)
E = campo elettrico (vettore)
v = velocità (vettore)
B = campo magnetico (pseudo-vettore)

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Accelerazione centrifuga:

$$\vec{F}_c = 2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}$$

Forza di Coriolis

Energia e traslazione temporale

Moto libero di una pallina

$$m\ddot{x}=0$$

$$x(t)=x_0+vt$$

$$E=\frac{1}{2}mv^2$$

Invarianza per traslazione temporale.

L'energia è costante nel tempo.

Non c'e' inizio e non c'e' fine.

L'istante t=0 non ha significato

moto in mezzo viscoso

$$m\ddot{x}=-\eta\dot{x}$$

$$\dot{x}(t)=v_0e^{-t/\tau};\tau=\frac{m}{\eta}$$

$$E=\frac{1}{2}mv_0^2e^{-2t/\tau}$$

Rottura della invarianza.

L'energia dipende dal tempo.

C'è un chiaro inizio e una estinzione.

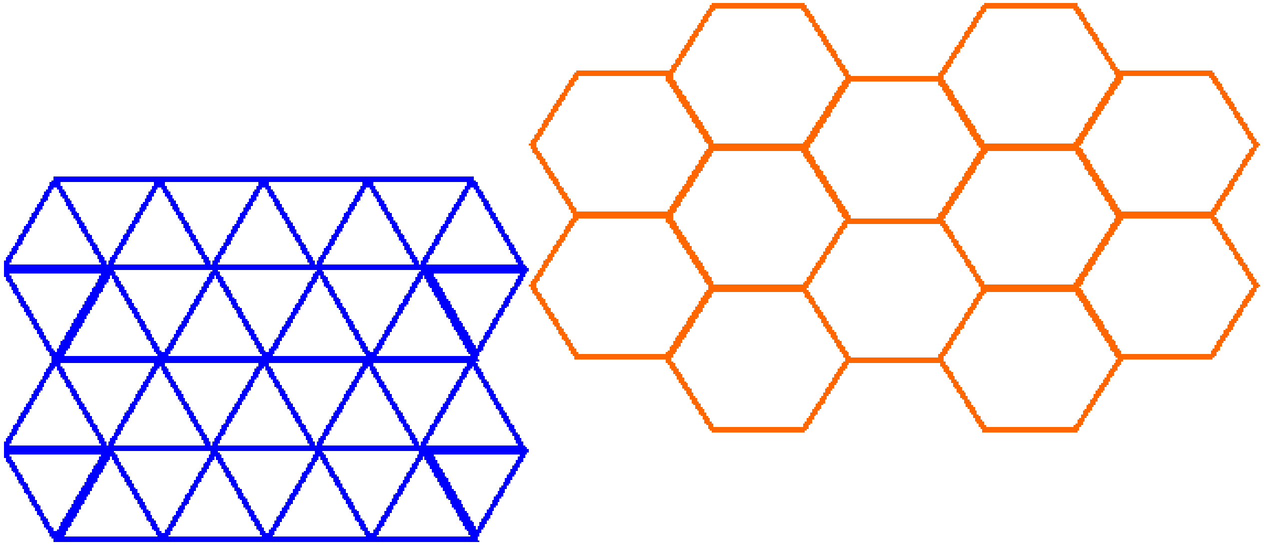
L'istante t=0 ha un significato preciso

Simmetria e leggi di conservazione

$$t \longrightarrow t + \Delta\, t$$

traslazione temporale

Teorema : Un sistema che esibisca invarianza temporale allora ammette l'energia come costante del moto



... l'invarianza per traslazioni spaziali a cosa corrisponde ?

Teorema di E. Noether (1915)

Emmy Noether

(Erlangen 1935 – Pennsylvania 1935)

Ad ogni simmetria continua corrisponde una quantità conservata

$t \rightarrow t + \Delta t$	*traslazione temporale*	Energia
$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \Delta \vec{r}$	*traslazione spaziale*	Quantità di moto
$\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \epsilon \vec{\omega} \times \vec{r}$	*Rotazione*	Momento angolare

Teorema di E. Noether

.. consente di definire correttamente Energia , quantità di moto e momento angolare anche nei casi in cui non è ovvio come farlo!

Esempio : quantità di moto trasportata dalla luce

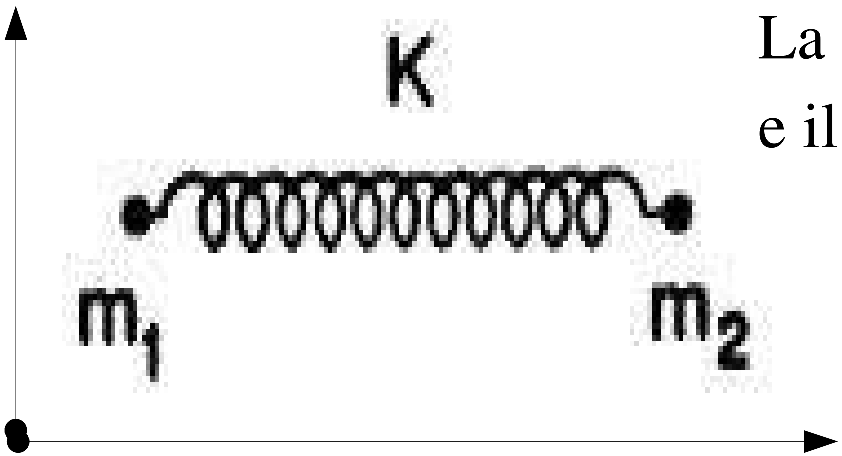
$$\frac{1}{c}(\vec{E}\times\vec{B})$$

In meccanica quantistica è il solo strumento a disposizione:

Venendo a mancare la simultanea definizione di posizione e velocità

Esempio di sistema invariante per traslazioni e rotazioni

Il problema dei due corpi "isolati" soggetti a forza interna



La quantità di moto del baricentro ,
e il momento angolare sono costanti del moto

$$E = \frac{1}{2}\mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 + \frac{1}{2}K(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2$$

La simmetria del problema è la simmetria della soluzione

esempio banale:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1 \\ x &= y \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Data una soluzione si può ricavare la seconda per inversione delle coordinate
l'inversione per delle coordinate è infatti una simmetria del problema

...esempio meno banale

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Equazione dell'oscillatore armonico
con periodo T = 2π/ω

Ammette invarianza per cambiamento di scala $x' = \lambda x$

Se conosco una soluzione, posso ottenerne un'altra effettuando un cambiamento di scala. (ingrandimento o rimpicciolimento)

Isocronismo : La durata dell'oscillazione non dipende dall'ampiezza!!!

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \boxed{\epsilon x^2} = 0$$

Rottura della simmetria: l'oscillatore non è più Isocrono.

...ancora meno banale

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{\alpha}{r^2}=0$$

Problema di Keplero: moto di un pianeta intorno al Sole.

effettuiamo un cambiamento di scala simultaneo di spazio e tempo

$$x'=\lambda x$$
$$t'=\tau t$$

---------->

$$m\frac{\lambda^3}{\tau^2}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+\frac{\alpha}{r^2}=0$$

se scegliamo $\lambda^3=\tau^2$ otteniamo l'Eq. di partenza

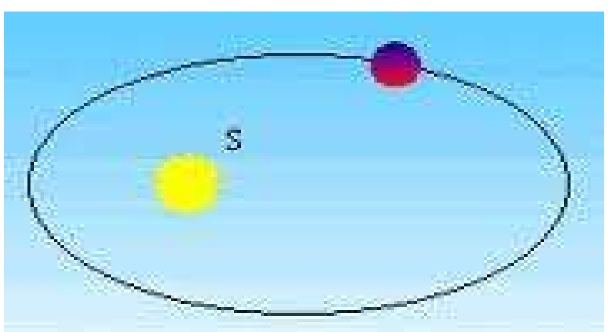
Se esiste l'orbita di raggio R e periodo T ---> esiste anche quella di raggio λR e di periodo $\sqrt{\lambda^3}\,T$ Equivalente alla Legge di Keplero: il cubo di R è proporzionale al quadrato di T !!!!

.... faster than light ???

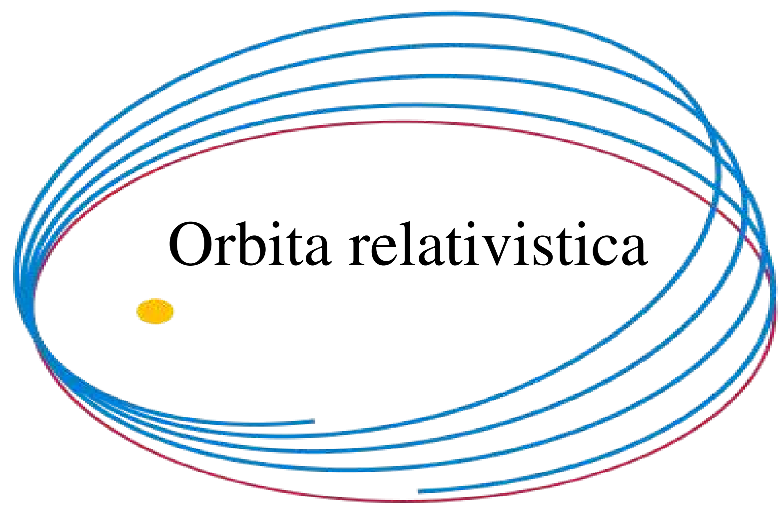
La velocità della luce è - nonostante la fretta dei neutrini - grandezza fondamentale della teoria della relatività.

$$c = \frac{spazio}{tempo}$$

Quindi non possiamo cambiare le scale di tempo e spazio in modo diverso...



Orbita Classica



La precisione del GPS sta tutta nel calcolo delle correzioni relativistiche !!

destra e sinistra non sono la stessa cosa (... e non solo in parlamento!)

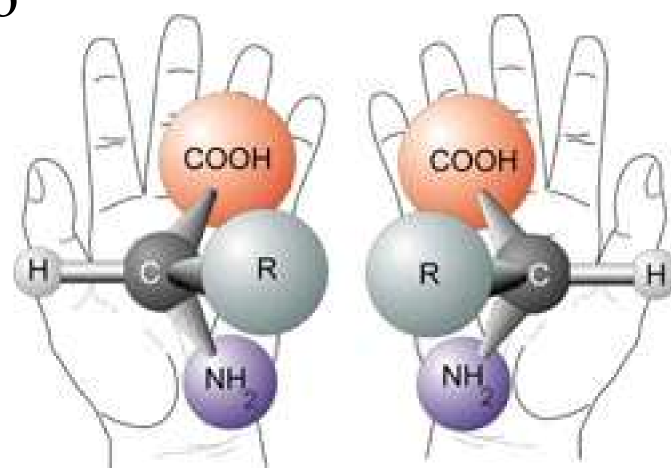
Da che parte cadrà?

A meno di effetti strani ci si aspetta
50% destra 50% sinistra.

Sicuramente prima o poi si instaurerà una
leggera asimmetria responsabile della caduta
Ma non sappiamo predire in quale verso
agirà la fluttuazione! Ma non è sempre così !

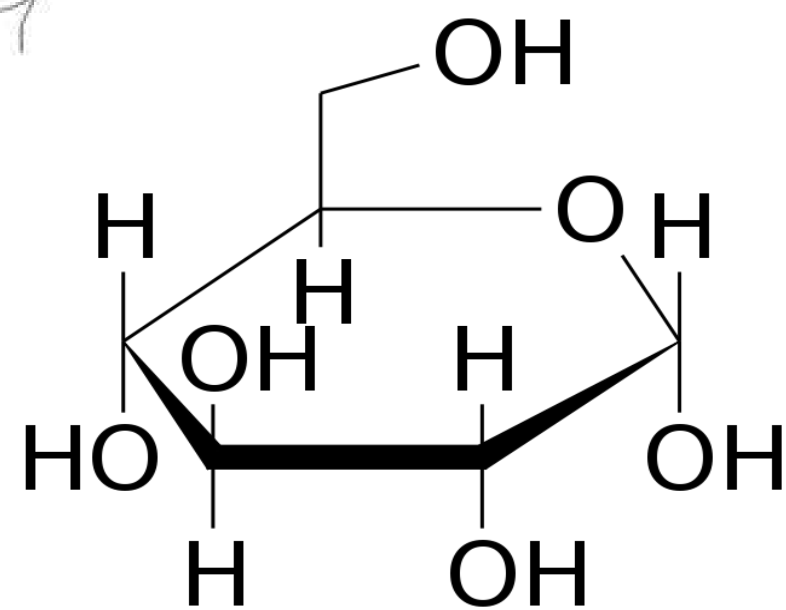
Enantiomeri e potere rotatorio

Certe molecole sono simmetriche:
se guardate allo specchio
sono identiche a se stesse
(Non son Chirali)

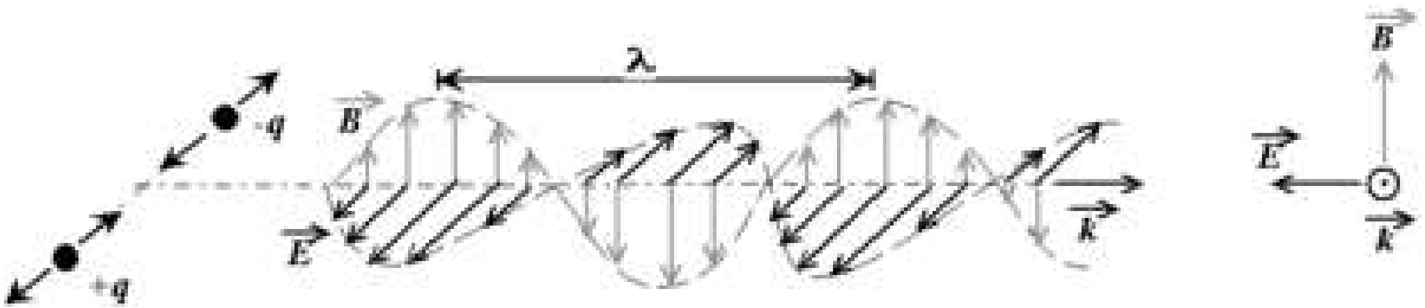


H —-H H----H
O----O O---O
H—O--H H—O--H
specchio

Altre distinguono tra destra e sinistra:
D-Glucosio: enantiomero
del glucosio più diffuso
si trova ad esempio nella frutta.
(Molecola chirale)



.... Rotazione della luce

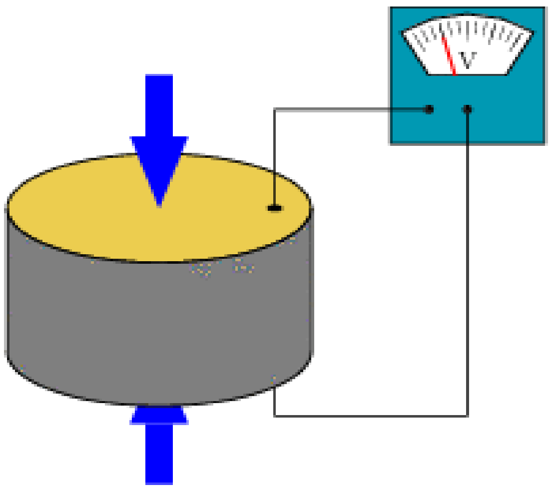


Cosa succede se la luce polarizzata entra in un mezzo ?
Se il mezzo non è chirale non succede nulla : non avendo preferenza per ruotare in verso orario o antiorario – come l'asino di Buridano – non ruota.

Se il mezzo è chirale, il piano di polarizzazione ruota di un angolo proporzionale al cammino percorso e alla concentrazione di composto chirale presente. La rotazione è oraria o antioraria secondo la chiralità del mezzo.

La piezoelettricità

perfetta simmetria tra causa ed effetto:



Alcuni cristalli hanno la proprietà
di creare una tensione elettrica
se vengono compressi, viceversa
se si applica una tensione esterna
si comprimono

Scambiare causa ed effetto significa operare la trasformazione
t --> -t   (riflessione temporale)

Un problema fondamentale

le Forze di cui si occupa la Fisica classica (gravità e elettromagnetismo) sono quelle che rientrano nell'esperienza quotidiana e sono tutte invarianti per inversione temporale t --> -t

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{F}_{grav} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\vec{F}_{lorentz} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$$

$$\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$$

... Allora, da dove origina l'irreversibilità che ci circonda ?