

Ragionamento nelle logiche descrittive

M. Simi, 2011-2012

LA KB delle logiche descrittive

- $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$
- \mathcal{T} (T-BOX), componente terminologica
- \mathcal{A} (A-BOX), componente asserzionale
- Una interpretazione I soddisfa \mathcal{A} e \mathcal{T} (quindi \mathcal{K}) sse soddisfa ogni asserzione in \mathcal{A} e ogni definizione in \mathcal{T} (I è un modello di \mathcal{K}).

Che tipo di ragionamenti?

- Progetto e gestione di ontologie
 - Controllo di consistenza dei concetti e supporto alla creazione di gerarchie
- Integrazione di ontologie
 - Relazioni tra concetti di ontologie diverse
 - Consistenza di gerarchie integrate
- Interrogazioni
 - Determinare fatti consistenti rispetto alle ontologie
 - Determinare se individui sono istanze di concetti
 - Recuperare individui che soddisfano una query
 - Verificare se un concetto è più generale di un'altro

Problemi decisionali per DL

- Problemi decisionali tipici
 - Soddisfacibilità di concetti
 - Sussunzione
- Problemi decisionali classici
 - Soddisfacibilità di una KB
 - Conseguenza logica di una KB
- Altri servizi inferenziali

Soddisfacibilità di concetti (CS)

- Soddisfacibilità di un concetto [CS(C)]: esiste un'interpretazione diversa dall'insieme vuoto?
- Un concetto C è *soddisfacibile* rispetto a \mathcal{T} se esiste un modello I di \mathcal{T} tale che C^I è non vuoto.
- Esempi
 - (father), concetto primitivo, è soddisfacibile;
 - (father \sqcap \neg father) è insoddisfacibile

Sussunzione

- Sussunzione
 - $\mathcal{K} \models C \sqsubseteq D$ (D *sussume* C)
se per ogni modello I di \mathcal{T} , $C^I \subseteq D^I$
Es. person *sussume* (person \sqcap \exists hasChild.T)
- Sussunzione strutturale e ibrida
 - Ibrida se si usano anche le definizioni nella KB
Es. Se student \sqsubseteq person \in T-BOX
allora person \sqcap \exists hasChild.T *sussume* student \sqcap \exists hasChild.T

Concetti equivalenti e disgiunti

- **Equivalenza:** $\mathcal{K} \models C \equiv D$
Due concetti C e D sono *equivalenti* rispetto a una terminologia \mathcal{T} se $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ per ogni modello \mathcal{I} di \mathcal{T} .
- **Concetti disgiunti:** Due concetti C e D sono *disgiunti* rispetto a \mathcal{T} se $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$ per ogni modello \mathcal{I} di \mathcal{T} .

Problemi decisionali classici

- **Soddisfacibilità di una KB (KBS)**
Esiste un modello per $\mathcal{K} = (\mathcal{T}, \mathcal{A})$?
- **Conseguenza logica di una KB:**
 $\mathcal{K} \models a:C$ il problema di decidere, se l'asserzione $a:C$ è conseguenza logica di \mathcal{K} detto anche "controllo di istanza" o Instance Checking (IC)

Altre inferenze per DL

- **Recupero:** trovare tutti gli individui che sono istanze di C . Calcola l'insieme $\{a \mid \mathcal{K} \models a:C\}$
- **Most Specific Concept (MSC)**
Dato un insieme di individui, trovare il concetto più specifico di cui sono istanza. Serve per la classificazione.
- **Least Common Subsumer (LCS)**
Dato un insieme di concetti, trovare il concetto più specifico che li subsume tutti. Serve per la classificazione.

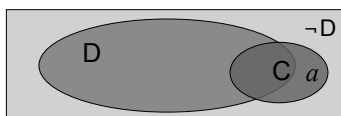
Riduzione tra problemi decisionali

- I problemi decisionali non sono indipendenti
 - la sussunzione ibrida e strutturale coincidono se la T-BOX è vuota
 - la sussunzione strutturale può essere ricondotta alla soddisfacibilità di concetti
 $C \sqsubseteq D$ sse $C \sqcap \neg D$ è insoddisfacibile
 - C è insoddisfacibile sse C è sussunto da \perp
 - C e D sono disgiunti sse $C \sqcap D$ è insoddisfacibile

Riconducibilità a KBS

- Tutti i problemi possono essere ricondotti a KBS, la soddisfacibilità di una KB.
- 1. **Consistenza di concetto**
 C è soddisfacibile sse $\mathcal{K} \cup \{a:C\}$ è soddisfacibile con a un nuovo individuo. Nota: $\{a:C\}$ viene aggiunto ad \mathcal{A} .
- 2. **Sussunzione**
 $\mathcal{K} \models C \sqsubseteq D$ (D subsume C) sse $\mathcal{K} \cup \{a: C \sqcap \neg D\}$ è insoddisfacibile, con a un nuovo individuo

D non
subsume
 C



Riconducibilità a KBS (cont.)

3. **Equivalenza**
 $\mathcal{K} \models C \equiv D$ sse $\mathcal{K} \models C \sqsubseteq D$ e $\mathcal{K} \models D \sqsubseteq C$
4. **Controllo di istanza**
 $\mathcal{K} \models a:C$ sse $\mathcal{K} \cup \{a:\neg C\}$ è insoddisfacibile
5. **Recupero riconducibile a controllo di istanza a sua volta riconducibile a KBS**

Esempi di riduzione di problemi

1. *I ricchi sono felici?*
 - Felice *sussume* Ricco? $\mathcal{K} \models \text{Ricco} \sqsubseteq \text{Felice}$
 - $\mathcal{K} \cup \{a: \text{Ricco} \sqcap \neg \text{Felice}\}$ è insoddisfacibile?
2. *Essere ricco e sano basta per essere felice?*
 - $\mathcal{K} \models \text{Ricco} \sqcap \text{Sano} \sqsubseteq \text{Felice}$
 - $\mathcal{K} \cup \{a: \text{Ricco} \sqcap \text{Sano} \sqcap \neg \text{Felice}\}$ è insoddisfacibile?

Esempi di riduzione di problemi

Sapendo che:

Per essere felici bisogna essere ricchi e sani (e non basta)

- T-BOX: $\text{Felice} \sqsubseteq \text{Ricco} \sqcap \text{Sano}$

Una persona ricca può essere infelice?

- $(\text{Ricco} \sqcap \neg \text{Felice})$ è soddisfacibile?
- $\mathcal{K} \cup \{a: \text{Ricco} \sqcap \neg \text{Felice}\}$ è soddisfacibile?

Sistemi deduttivi per DL

- Algoritmi per determinare la sussunzione strutturale
 - Per linguaggi poco espressivi (senza negazione)
- La tecnica più diffusa è una *tecnica per la soddisfacibilità* di una KB.
 - tecnica di propagazione | espansione di vincoli
 - una variante di un metodo di deduzione naturale, i *tableaux sémantici*

Tecnica di propagazione di vincoli

- *L'idea di base:* ogni formula nella KB è un vincolo sulle interpretazioni affinché siano modelli di KB
- I vincoli complessi si scindono in vincoli più elementari mediante *regole di propagazione* fino ad arrivare, in un numero finito di passi, a *vincoli atomici*, non ulteriormente decomponibili
- Se l'insieme di vincoli atomici contiene una contraddizione evidente (detta *clash*) allora la KB non è soddisfacibile, altrimenti abbiamo trovato un modello.

Vantaggi della tecnica

- è semplice
- è costruttiva
- è modulare: abbiamo una regola per ogni costrutto
- è utile per progettare algoritmi di decisione e per valutarne la complessità
- Vediamo la tecnica in dettaglio per *ALC*

Richiamo di *ALC*

A	(concetto primitivo)
T	(top, concetto universale)
⊥	(bottom)
¬C	(negazione)
C ⊓ D	(intersezione)
C ⊔ D	(unione)
∀R.C	(restrizione di valore)
∃R.C	(esistenza)
A, B concetti primitivi	R ruolo primitivo
C, D concetti	

Passi preliminari per KBS in \mathcal{ALC}

1. Espansione delle definizioni: passo preliminare che consiste nel ricondursi ad una $\mathcal{K} = (\{ \}, \mathcal{A})$ con solo la parte di asserzioni. Le asserzioni sono i vincoli iniziali
 2. Normalizzazione: portare le asserzioni in forma normale negativa
- A questo punto possiamo applicare le regole di propagazione di vincoli

Normalizzazione

- Un insieme di vincoli si dice in forma *normale negativa* se ogni occorrenza dell'operatore \neg è davanti a un concetto primitivo.

Regole di

normalizzazione:

$$\begin{aligned} \neg \top &\mapsto \perp \\ \neg \perp &\mapsto \top \\ \neg \neg C &\mapsto C \\ \neg(C_1 \sqcap C_2) &\mapsto \neg C_1 \sqcup \neg C_2 \\ \neg(C_1 \sqcup C_2) &\mapsto \neg C_1 \sqcap \neg C_2 \\ \neg(\exists R.C) &\mapsto \forall R.\neg C \\ \neg(\forall R.C) &\mapsto \exists R.\neg C \end{aligned}$$

Clash per \mathcal{ALC}

- Un *clash* per \mathcal{ALC} è un insieme di vincoli di uno dei seguenti tipi:
 - $\{a:C, a:\neg C\}$
 - $\{a:\perp\}$

Propagazione di vincoli per DL

- Un *vincolo* è una asserzione della forma $a:C$ o $(b, c):R$, dove a, b e c sono costanti (individui distinti) o variabili ($x, y \dots$ individui non necessariamente distinti).
- Un insieme di vincoli \mathcal{A} è *soddisfacibile* sse esiste una interpretazione che soddisfa ogni vincolo in \mathcal{A} .

Alberi di completamento

- *Foresta di completamento*: struttura dati che serve per l'esecuzione dell'algoritmo
- Per ogni asserzione $x:C$ in \mathcal{A} si inizializza un albero

$$x \quad \mathcal{L}(x) = \{C\} \text{ label di } x$$
- Ad ogni passo si espande un nodo dell'albero o si creano nuovi nodi con le seguenti regole.

Regole per \mathcal{ALC}

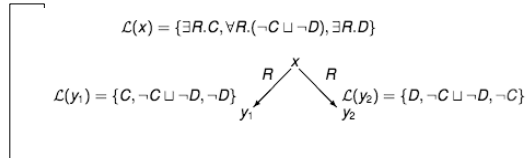
Rule	Description
(\sqcap)	if 1. $C_1 \sqcap C_2 \in \mathcal{L}(x)$ and 2. $\{C_1, C_2\} \not\subseteq \mathcal{L}(x)$ then $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) \cup \{C_1, C_2\}$
(\sqcup)	if 1. $C_1 \sqcup C_2 \in \mathcal{L}(x)$ and 2. $\{C_1, C_2\} \cap \mathcal{L}(x) = \emptyset$ <i>nessuno dei due sta in $\mathcal{L}(x)$</i> then $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) \cup \{C\}$ for some $C \in \{C_1, C_2\}$
(\exists)	if 1. $\exists R.C \in \mathcal{L}(x)$ and 2. x has no R -successor y with $C \in \mathcal{L}(y)$ then create a new node y with $\mathcal{L}((x, y)) = \{R\}$ and $\mathcal{L}(y) = \{C\}$
(\forall)	if 1. $\forall R.C \in \mathcal{L}(x)$ and 2. x has an R -successor y with $C \notin \mathcal{L}(y)$ then $\mathcal{L}(y) \rightarrow \mathcal{L}(y) \cup \{C\}$

Non determinismo

- Le regole per la congiunzione, per *ALLC* sono *deterministiche*
- La regola per la disgiunzione, è non deterministica: la sua applicazione risulta in insiemi di vincoli alternativi
- \mathcal{A} è soddisfacibile sse almeno uno degli insiemi di vincoli ottenuti lo è.
- \mathcal{A} è insoddisfacibile sse tutte le alternative si concludono con una contraddizione evidente (*clash*)

Esempio 1

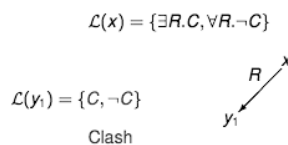
- $\mathcal{A} = \{x: \exists R.C \sqcap \forall R.(\neg C \sqcup \neg D) \sqcap \exists R.D\}$ soddisfacibile?



- $\mathcal{A} = \{x: \exists R.C \sqcap \forall R.(\neg C \sqcup \neg D) \sqcap \exists R.D\}$ è soddisfacibile
- Modello trovato: $\Delta' = \{x, y_1, y_2\}$
 $C' = \{y_1\}$ $D' = \{y_2\}$ $R' = \{(x, y_1), (x, y_2)\}$

Esempio 2

- $\mathcal{A} = \{x: \exists R.C \sqcap \forall R. \neg C\}$ soddisfacibile?



- $\mathcal{A} = \{x: \exists R.C \sqcap \forall R. \neg C\}$ non è soddisfacibile
- Non ha modelli

Esempio 3

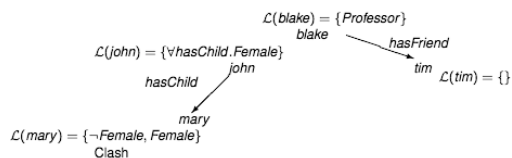
Tutti i figli di John sono femmine. Mary è una figlia di John. Tim è un amico del professor Blake. Dimostra che Mary è femmina.

$\mathcal{A} = \{\text{john:} \forall \text{hasChild.Female}, (\text{john}, \text{mary}): \text{hasChild}, (\text{blake}, \text{tim}): \text{hasFriend}, \text{blake:Professor}\}$

Dimostrare:

- $\mathcal{A} \models \text{mary:Female}$ ovvero che
- $\mathcal{A} \cup \text{mary:}\neg\text{Female}$ insoddisfacibile

Esempio 3



Correttezza e completezza di KBS

- Il risultato è dimostrabilmente invariante rispetto all'ordine di applicazione delle regole.
- Correttezza:** se l'algoritmo termina con un sistema di vincoli completo e senza *clash*, allora \mathcal{A} è soddisfacibile e dai vincoli si può ricavare un modello
- Completezza:** se una base di conoscenza \mathcal{A} è soddisfacibile, allora l'algoritmo termina producendo almeno un modello finito senza *clash*.
- KBS è decidibile per *ALLC* e anche per *ALLCN*.

Altri costrutti

\mathcal{H} : assiomi di inclusione tra ruoli

$$R \sqsubseteq S \text{ sse } R^T \subseteq S^T$$

\mathcal{Q} : restrizioni numeriche qualificate

$$\{\geq n R.C\}^T = \{a \in \Delta^I \mid |\{b \mid (a,b) \in R^T \wedge b \in C^T\}| \geq n\}$$

$$\{\leq n R.C\}^T = \{a \in \Delta^I \mid |\{b \mid (a,b) \in R^T \wedge b \in C^T\}| \leq n\}$$

O : nominali (singoletti); $\{a\}^T = \{a\}$

I : ruolo inverso, $(R^-)^T = \{(a,b) \mid (b,a) \in R^T\}$

\mathcal{F} : ruolo funzionale

$$\text{fun}(F) \text{ sse } \forall x,y,z (x,y) \in F^T \wedge (x,z) \in F^T \Rightarrow y=z$$

\mathcal{R}_+ : ruolo transitivo

$$(R_+)^T = \{(a,b) \mid \exists c \text{ tale che } (a,c) \in R^T \wedge (c,b) \in R^T\}$$

S : $\mathcal{ALC} + \mathcal{R}_+$

OWL-DL

OWL-DL equivalente a \mathcal{SHOIN}^-

S : $\mathcal{ALC} + \text{ruoli transitivi } \mathcal{R}_+$

\mathcal{H} : specializzazione di ruoli

O : nominali o singoletti

I : ruoli inversi

\mathcal{N} : restrizioni numeriche

OWL-Lite

OWL-Lite equivalente a \mathcal{SHIF}^-

S : $\mathcal{ALC} + \text{ruoli transitivi } \mathcal{R}_+$

\mathcal{H} : specializzazione di ruoli

I : ruoli inversi

\mathcal{F} : ruoli funzionali

Costruttori di OWL

Costruttore	Sintassi DL	Esempio
A (URI)	A	Conference
thing	T	
nothing	\perp	
intersectionOf	$C_1 \sqcap \dots \sqcap C_n$	Reference \sqcap Journal
unionOf	$C_1 \sqcup \dots \sqcup C_n$	Organization \sqcup Institution
complementOf	$\neg C$	\neg MasterThesis
oneOf	$\{x_1\} \sqcup \dots \sqcup \{x_n\}$	{WISE, ISWC, ...}
allValuesFrom	$\forall P.C$	\forall date.Date
someValuesFrom	$\exists P.C$	\exists date.{2005}
maxCardinality	$\leq nP$	(≤ 1 location)
minCardinality	$\geq nP$	(≥ 1 publisher)

Assiomi OWL

Axiom	DL Syntax	Example
subClassOf	$C_1 \sqsubseteq C_2$	Human \sqsubseteq Animal \sqcap Biped
equivalentClass	$C_1 \equiv C_2$	Man \equiv Human \sqcap Male
disjointWith	$C_1 \sqsubseteq \neg C_2$	Male $\sqsubseteq \neg$ Female
sameIndividualAs	$\{x_1\} \equiv \{x_2\}$	{President_Bush} \equiv {G.W. Bush}
differentFrom	$\{x_1\} \sqsubseteq \neg \{x_2\}$	{John} $\sqsubseteq \neg$ {peter}
subPropertyOf	$P_1 \sqsubseteq P_2$	hasDaughter \sqsubseteq hasChild
equivalentProperty	$P_1 \equiv P_2$	cost \equiv price
inverseOf	$P_1 \equiv P_2^-$	hasChild \equiv hasParent $^-$
transitiveProperty	$P^+ \sqsubseteq P$	ancestor $^+$ \sqsubseteq ancestor
functionalProperty	$T \sqsubseteq \leq 1P$	T $\sqsubseteq \leq 1$ hasMother
inverseFunctionalProperty	$T \sqsubseteq \leq 1P^-$	T $\sqsubseteq \leq 1$ hasSSN $^-$

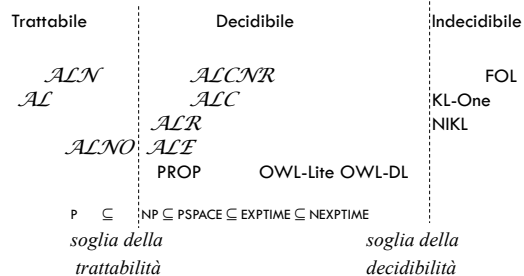
Un esempio: sintassi XML

E.g., $\text{Person} \sqcap \text{VhasChild.Doctor} \sqcup \exists \text{hasChild.Doctor}$:

```
<owl:Class>
  <owl:intersectionOf rdf:parseType="collection">
    <owl:Class rdf:about="#Person"/>
    <owl:Restriction>
      <owl:onProperty rdf:resource="#hasChild"/>
      <owl:toClass>
        <owl:unionOf rdf:parseType="collection">
          <owl:Class rdf:about="#Doctor"/>
          <owl:Restriction>
            <owl:onProperty rdf:resource="#hasChild"/>
            <owl:hasClass rdf:resource="#Doctor"/>
          </owl:Restriction>
        </owl:unionOf>
      </owl:toClass>
    </owl:Restriction>
  </owl:intersectionOf>
</owl:Class>
```

Complessità e decidibilità per DL

(con terminologie acicliche)



Considerazioni: DL trattabili

- Esistono logiche con sussunzione decidibili in tempo polinomiale
 - \mathcal{AL} : intersezione di concetti, negazione limitata, esistenziale semplice, restrizione universale di ruolo
 - \mathcal{ALN} : \mathcal{AL} + restrizioni numeriche
 - \mathcal{ALNO} : \mathcal{ALN} + concetti individuali
- PROP è NP-completo, ma \mathcal{ALNO} e PROP non sono confrontabili dal punto di vista espressivo.

DL espressive e decidibili

- \mathcal{ALC} è PSPACE con espansione incrementale di \mathcal{T}
 - $\mathcal{ALC} = \mathcal{ALUE}$ (unione è fonte di complessità)
- $\mathcal{ALCNR} = \mathcal{ALC}$ + restrizioni numeriche e congiunzione di ruoli è decidibile in PSPACE
- \mathcal{ALC} è EXPTIME nel caso di \mathcal{T} ciclica.
- $\mathcal{SHIF} = \text{OWL-Lite}$, \mathcal{AL} + specializzazione di ruoli, ruoli transitivi, inversi e funzionali è decidibile in EXPTIME
- $\mathcal{SHOIN} = \text{OWL-DL}$, \mathcal{AL} + specializzazione di ruoli, ruoli transitivi e inversi, singoletti e restrizioni numeriche è decidibile in EXPTIME

Conclusioni

- Gli studi di complessità sulle DL hanno messo in luce un ampio spettro di possibilità rispetto al *trade-off* tra espressività e complessità
- Hanno consentito di progettare sistemi espressivi ed efficienti (anche se di complessità esponenziale nel caso peggiore).
- Il web semantico ha solidi fondamenti teorici.