

## Agenti logici: la logica del prim'ordine

Sintassi, semantica, inferenza

Maria Simi  
a.a. 2011-2012

## Il calcolo dei predicati per R.C.

- Nella logica dei predicati abbiamo assunzioni ontologiche più ricche: gli *oggetti*, le *proprietà* e le *relazioni*
- Si inizia con una *concettualizzazione*: si tratta di decidere quali sono le cose di cui si vuole parlare
  - *Gli oggetti*: un libro, un evento, una persona, un istante di tempo, un insieme, una funzione, un unicorno ...
  - Gli oggetti possono essere identificati con simboli o relativamente ad altri oggetti, mediante *funzioni*: "la madre di Pietro"
  - L'insieme degli oggetti rilevanti costituiscono il *dominio del discorso*. Il dominio potrebbe essere infinito.
- Le *proprietà*: "la madre di Pietro è simpatica"
- Le *relazioni* tra gli oggetti: "Pietro è amico di Paolo"

## Esempio: il mondo dei blocchi

Ci interessano i blocchi e alcune loro relazioni spaziali

*Dominio*: {a, b, c, d, e} ← *blocchi veri!*

*Le funzioni*: si individuano le funzioni rilevanti che servono anch'esse per identificare oggetti.

Es. *Hat* la funzione unaria che dato un blocco identifica il blocco che ci sta sopra;  $Hat(b)=a$

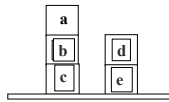
*Le relazioni*: si individuano le relazioni interessanti. Es.

$On = \{<a, b>, <b, c>, <d, e>\}$

$Clear = \{a, d\}$

$Table = \{c, e\}$

$Block = \{a, b, c, d, e\}$



## Concettualizzazione

$\langle \{a, b, c, d, e\}, \{Hat\}, \{On, Clear, Table, Block\} \rangle$

- Le concettualizzazioni possibili sono infinite: un aspetto importante è il livello di astrazione *giusto* per gli scopi della rappresentazione.

Es. se fosse rilevante il colore o la grandezza dei blocchi dovremmo introdurre predicati anche per questi aspetti

## La logica dei predicati del prim'ordine (FOL)

### ▪ Il linguaggio: vocabolario

- *Connettivo* →  $\wedge$  |  $\vee$  |  $\neg$  |  $\Rightarrow$  |  $\Leftrightarrow$  |  $\Leftarrow$
- *Quantificatore* →  $\forall$  |  $\exists$
- *Variabile* →  $x$  |  $y$  | ...  $a$  |  $s$  ... (lettere minuscole)
- *Costante* → Es.  $A$  |  $B$  | ... Mario | Pippo | 2 ...
- *Funzione* → Es. *Hat* | *Padre-di* |  $+$  |  $-$  | ...  
(con *arità*  $\geq 1$ ) 1 1 2 2
- *Predicato* → Es. *On* | *Clear* |  $\geq$  |  $<$  | ...  
(con *arità*  $\geq 0$ ) 2 1 2 2

## Il linguaggio: i termini

- La sintassi dei termini:  
 $Termine \rightarrow Costante \mid Variabile \mid Funzione(Termine, \dots)$   
(un numero di termini pari alla arità della funzione)
- Esempi di termini ben formati:
 

$f(x, y)$	$+(2, 3)$
<i>Padre-di</i> (Giovanni)	$x, A, B, 2$
<i>Prezzo</i> (Banane)	$Hat(A)$

## Il linguaggio: le formule

La sintassi delle formule:

$Formula\text{-atomica} \rightarrow True \mid False \mid$   
 $Termine = Termine \mid$   
 $Predicato(Termine, \dots)$   
 (un numero di termini pari alla arità del predicato)  
 $Formula \rightarrow Formula\text{-atomica} \mid$   
 $Formula\ Connettivo\ Formula \mid$   
 $Quantificatore\ Variabile\ Formula \mid$   
 $\neg Formula \mid (Formula)$

## Il linguaggio: formule ben formate

Esempi di formule atomiche:

$Ama(Giorgio, Lucia)$                        $+(2, 3) = 5$   
 $On(A, B)$                                        $x = 5$   
 $Madre-di(Luigi) = Silvana$   
 $Amico(Padre-di(Giorgio), Padre-di(Elena))$

Esempi di formule complesse:

$On(A, B) \wedge On(B, C)$                       (congiunzione)  
 $Studia(Paolo) \Rightarrow Promosso(Paolo)$       (implicazione materiale)

## Il linguaggio: quantificatori

- Quantificatore universale
  - $\forall x Ama(x, Gelato)$
- Quantificatore esistenziale
  - $\exists x Mela(x) \wedge Rossa(x)$
- Nota: l'ordine dei quantificatori è importante:
  - $\forall x (\exists y Ama(x, y))$                       Tutti amano qualcuno
  - $\exists y (\forall x Ama(x, y))$                       Esiste qualcuno amato da tutti
- Ambito dei quantificatori:
 

<i>ambito di y</i>	<i>ambito di x</i>
$\forall x (\exists y Ama(x, y))$	$\forall x (\exists y Ama(x, y))$

## Formule *chiuse*, *aperte*, *ground*

- Di solito le variabili sono usate nell'ambito di quantificatori. In tal caso le occorrenze si dicono *legate*. Se non legate sono *libere*.  
 $Mela(x) \Rightarrow Rossa(x)$                       x è libera in entrambe le occ.  
 $\forall x Mela(x) \Rightarrow Rossa(x)$                       x è legata ...  
 $Mela(x) \Rightarrow \exists x Rossa(x)$                       la 1a è libera, la 2a legata
- Def. *Formula chiusa*: una formula che non contiene occorrenze di variabili libere.
- Altrimenti è detta *aperta*.
- Def. *Formula ground*: una formula che non contiene variabili.

## Il linguaggio: precedenza tra gli operatori

Precedenza tra gli operatori logici:

$= > \neg > \wedge > \vee > \Rightarrow, \Leftrightarrow > \forall, \exists$

Es.  $\forall x Persona(x) \Rightarrow Sesso(x)=M \vee Sesso(x)=F$

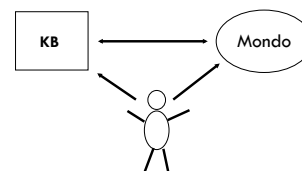
è da interpretare come ...

$\forall x Persona(x) \Rightarrow (Sesso(x)=M) \vee (Sesso(x)=F)$

$\forall x Persona(x) \Rightarrow ((Sesso(x)=M) \vee (Sesso(x)=F))$

$\forall x(Persona(x) \Rightarrow ((Sesso(x)=M) \vee (Sesso(x)=F)))$

## Semantica dichiarativa



Consiste nello stabilire una corrispondenza tra:

- i termini del linguaggio e gli oggetti del mondo
- le formule chiuse e i valori di verità

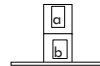
## Interpretazione

- Una interpretazione  $\mathcal{I}$  stabilisce una corrispondenza precisa tra elementi atomici del linguaggio ed elementi della concettualizzazione.  $\mathcal{I}$  interpreta:
  - i simboli di costante come elementi del dominio
  - i simboli di funzione come funzioni da n-uple di D in D
  - i simboli di predicato come insiemi di n-uple

## Semantica: un esempio

$On(A, B)$   
 $Clear(A)$   
 $Table(B)$

Due interpretazioni possibili:



... quella intesa

$\mathcal{I}(A)=a$

$\mathcal{I}(B)=b$

$\mathcal{I}(On)=\{<a, b>\}$

$\mathcal{I}(Clear)=\{a\}$

$\mathcal{I}(Table)=\{b\}$

... un'altra possibile

$\mathcal{I}(A)=a$

$\mathcal{I}(B)=b$

$\mathcal{I}(On)=\{<b, a>\}$

$\mathcal{I}(Clear)=\{b\}$

$\mathcal{I}(Table)=\{a\}$

## Semantica composizionale

- Il significato di un termine o di una formula composta è determinato in funzione del significato dei suoi componenti:
  - Es. Sorella(Madre(Pietro))
  - La formula  $A \wedge B$  è vera in una certa interpretazione se entrambe A e B sono vere
  - $\neg A$  è vera se A è falsa
  - $A \vee B$  è vera se A è vera oppure B è vera (o entrambe)
  - $A \Rightarrow B$  è vera se A è falsa oppure B è vera (come  $\neg A \vee B$ )

## Semantica ( $\forall$ )

- $\forall x A(x)$  è vera se per ciascun elemento del dominio A è vera di quell'elemento
- Se il dominio è finito equivale a un grosso  $\wedge$   
 $\forall x \text{Mortale}(x)$   
 $\text{Mortale}(\text{Gino}) \wedge \text{Mortale}(\text{Pippo}) \wedge \dots$
- Tipicamente, siccome difficilmente una proprietà è universale,  $\forall$  si usa quasi sempre insieme a  $\Rightarrow$   
 $\forall x \text{Persona}(x) \Rightarrow \text{Mortale}(x)$

## Semantica ( $\exists$ )

- $\exists x A(x)$  è vera se esiste almeno un elemento del dominio per cui A è vera
- Se il dominio è finito equivale a un grosso  $\vee$   
 $\exists x \text{Persona}(x)$   
 $\text{Persona}(\text{Gino}) \vee \text{Persona}(\text{Pippo}) \vee \dots$
- Tipicamente  $\exists$  si usa con  $\wedge$   
 $\exists x \text{Persona}(x) \wedge \text{Speciale}(x)$   
 $\exists x \text{Persona}(x) \Rightarrow \text{Speciale}(x)$  troppo debole

## Relazione tra $\forall$ ed $\exists$

$\forall x \neg P(x) \equiv \neg \exists x P(x)$

$\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$

$\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$

$\neg \forall x \neg P(x) \equiv \exists x P(x)$

$\neg P \wedge \neg Q \equiv \neg (P \vee Q)$

$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

$P \wedge Q \equiv \neg (\neg P \vee \neg Q)$

$P \vee Q \equiv \neg (\neg P \wedge \neg Q)$

## Perché logica del *prim'ordine*?

- Le variabili possono essere usate per denotare oggetti del dominio, non per denotare funzioni o predicati o formule.
  - Funzioni e predicati possono essere oggetti del dominio; ma è così non possono essere usati al posto dei nomi di funzioni o predicati.
- Es.  $\exists f \forall x f(x)=x$  (esistenza dell'identità) NO  
 $\exists f$ . *Funzione-Identità*(f) SI  
 $\forall p$  *BuonaQualità*(p)  $\Rightarrow$  *Ha*(Giorgio, p) SI  
 $\forall p$  *BuonaQualità*(p)  $\Rightarrow$  *p*(Giorgio) NO
- Il superamento di questa restrizione porta a linguaggi del second'ordine, o di ordine superiore.

## Semantica standard e semantica 'database'

- Riccardo ha due fratelli: Giovanni e Goffredo**  
 $\text{Fratello}(\text{Giovanni}, \text{Riccardo}) \wedge \text{Fratello}(\text{Goffredo}, \text{Riccardo})$   
 $\wedge \text{Giovanni} \neq \text{Goffredo}$   
 $\wedge \forall x \text{Fratello}(x, \text{Riccardo}) \Rightarrow (x = \text{Giovanni}) \vee (x = \text{Goffredo})$
- Semantica dei database**
  - Ipotesi dei nomi unici: simboli distinti, oggetti distinti
  - Ipotesi del mondo chiuso: tutto ciò di cui non si sa che è vero è falso
  - Chiusura del dominio: esistono solo gli oggetti di cui si parla

## Interazione con la KB in FOL

- Asserzioni**
  - $\text{TELL}(\text{KB}, \text{King}(\text{John}))$
  - $\text{TELL}(\text{KB}, \forall x \text{King}(x) \Rightarrow \text{Person}(x))$
- Conseguenze logiche**
  - $\text{ASK}(\text{KB}, \text{Person}(\text{John}))$  Si, se  $\text{KB} \models \text{Person}(\text{John})$
  - $\text{ASK}(\text{KB}, \exists x \text{Person}(x))$ 
    - 'Si' sarebbe riduttivo
    - Lista di sostituzioni o legami:  $\{\{x/\text{John}\} \{x/\text{George}\} \dots\}$  è una risposta più collaborativa

## Inferenza nella logica del prim'ordine

- Riduzione a inferenza proposizionale
- Il metodo di risoluzione per FOL**
  - Trasformazione in forma a clausole
  - Unificazione
- Casi particolari: sistemi a regole**
  - Backward chaining* e programmazione logica
  - Forward chaining* e basi di dati deduttive

## Regole di inferenza per $\forall$

- Istanziamento dell'Universale ( $\forall$  eliminazione)**  

$$\frac{\forall x A[x]}{A[g]}$$

dove  $g$  è un termine *ground* e  $A[g]$  è il risultato della sostituzione di  $g$  per  $x$  in  $A$ .
- Da:  $\forall x \text{King}(x) \wedge \text{Greedy}(x) \Rightarrow \text{Evil}(x)$  si possono ottenere**
  - $\text{King}(\text{John}) \wedge \text{Greedy}(\text{John}) \Rightarrow \text{Evil}(\text{John})$
  - $\text{King}(\text{Father}(\text{John})) \wedge \text{Greedy}(\text{Father}(\text{John})) \Rightarrow \text{Evil}(\text{Father}(\text{John}))$

## Regole per l'esistenziale ( $\exists$ )

- Istanziamento dell'esistenziale ( $\exists$  eliminazione)**  

$$\frac{\exists x A[x]}{A[k]}$$
  - 1. se  $\exists$  non compare nell'ambito di  $\forall$ ,  $k$  è una costante nuova (*costante di Skolem*)
  - 2. altrimenti va introdotta una funzione (di Skolem) nelle variabili quantificate universalmente  
 $\exists x \text{Padre}(x, G)$  diventa  $\text{Padre}(k, G)$   
 $\forall x \exists y \text{Padre}(y, x)$  diventa  $\forall x \text{Padre}(p(x), x)$   
 e non  $\forall x \text{Padre}(k, x)$
- ... altrimenti tutti avrebbero lo stesso padre !

## Riduzione a inferenza proposizionale

- Proposizionalizzazione
  - Creare tante istanze delle formule quantificate universalmente quanti sono gli oggetti menzionati
  - Eliminare i quantificatori esistenziali skolemizzando
- A questo punto possiamo trattare la KB come proposizionale e applicare gli algoritmi visti
- Problem?
  - Le costanti sono in numero finito ...
  - ...ma se ci sono funzioni, il numero di istanze da creare è infinito: John, Padre(John), Padre(Padre(John)) ...

## Teorema di Herbrand

- Se  $KB \models A$  allora c'è una dimostrazione che coinvolge solo un sotto-insieme finito della KB proposizionalizzata
- Si può procedere incrementalmente ...
  1. Creare le istanze con le costanti
  2. Creare poi quelle con un solo livello di annidamento Padre(John), Madre(John)
  3. Poi quelle con due livelli di annidamento Padre(Padre(John)), Padre(Madre(John)) ...
- Se  $KB \not\models A$  il processo non termina. Semidecidibile.

## Metodo di risoluzione per il FOL

- Abbiamo visto la regola di risoluzione per PROP: un metodo deduttivo corretto e completo con un'unica regola
- Possiamo estendere al FOL il metodo di risoluzione?
- Sì. Ma per arrivare a definire la regola ...
  - Dobbiamo estendere al FOL la trasformazione in forma a clausole
  - Dobbiamo introdurre il concetto di unificazione

## Forma a clausole

- Costanti, funzioni, predicati sono come definiti, ma escludiamo nel seguito formule atomiche del tipo  $(t_1 = t_2)$
- Una clausola è un insieme di letterali, che rappresenta la loro disgiunzione
  - $Clausola \rightarrow \{Letterale, \dots, Letterale\}$
  - $Letterale \rightarrow Formula\_atomica \mid \neg Formula\_atomica$
- Una KB è un insieme di clausole.

## Trasformazione in forma a clausole

- **Teorema:** per ogni formula chiusa  $\alpha$  del FOL è possibile trovare in maniera *effettiva* un insieme di clausole  $FC(\alpha)$  che è *soddisfacibile* sse  $\alpha$  lo era [*insoddisfacibile* sse  $\alpha$  lo era]
- Vediamo la trasformazione in dettaglio ... per la frase "Tutti coloro che amano tutti gli animali sono amati da qualcuno"  
 $\forall x (\forall y Animale(y) \Rightarrow Ama(x,y)) \Rightarrow (\exists y Ama(y, x))$

## Trasformazione: passo 1

1. Eliminazione delle implicazioni ( $\Rightarrow$  e  $\Leftrightarrow$ ):

$$A \Rightarrow B \quad \text{diventa} \quad \neg A \vee B$$

$$A \Leftrightarrow B \quad \text{diventa} \quad (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

$$\forall x (\forall y Animale(y) \Rightarrow Ama(x,y)) \Rightarrow (\exists y Ama(y, x))$$

$$\forall x \neg(\forall y Animale(y) \Rightarrow Ama(x,y)) \vee (\exists y Ama(y, x))$$

$$\forall x \neg(\forall y \neg Animale(y) \vee Ama(x,y)) \vee (\exists y Ama(y, x))$$

## Trasformazione: passo 2

### 2. Negazioni all'interno

$\neg\neg A$  diventa  $A$   
 $\neg(A \wedge B)$  diventa  $\neg A \vee \neg B$  (De Morgan)  
 $\neg(A \vee B)$  diventa  $\neg A \wedge \neg B$  (De Morgan)  
 $\neg\forall x A$  diventa  $\exists x \neg A$   
 $\neg\exists x A$  diventa  $\forall x \neg A$   
 $\forall x \neg(\forall y \neg\text{Animale}(y) \vee \text{Ama}(x,y)) \vee (\exists y \text{Ama}(y, x))$   
 $\forall x (\exists y \neg(\neg \text{Animale}(y) \vee \text{Ama}(x,y))) \vee (\exists y \text{Ama}(y, x))$   
 $\forall x (\exists y (\text{Animale}(y) \wedge \neg \text{Ama}(x,y))) \vee (\exists y \text{Ama}(y, x))$

## Trasformazione: passo 3

### 3. Standardizzazione delle variabili: ogni quantificatore una variabile diversa

$\forall x (\exists y (\text{Animale}(y) \wedge \neg \text{Ama}(x, y))) \vee (\exists y \text{Ama}(y, x))$   
 $\forall x (\exists y (\text{Animale}(y) \wedge \neg \text{Ama}(x, y))) \vee (\exists z \text{Ama}(z, x))$

## Trasformazione: passo 4

### 4. Skolemizzazione: eliminazione dei quantificatori esistenziali

$\forall x (\exists y (\text{Animale}(y) \wedge \neg \text{Ama}(x, y))) \vee (\exists z \text{Ama}(z, x))$

*Ci sono due quantificatori esistenziali nell'ambito di una universale, dobbiamo introdurre due funzioni di Skolem*

$\forall x (\text{Animale}(F(x)) \wedge \neg \text{Ama}(x, F(x))) \vee \text{Ama}(G(x), x)$

## Trasformazione: passo 5

### 5. Eliminazione quantificatori universali

- Possiamo portarli tutti davanti (forma prenessa)  
 $(\forall x A) \vee B$  diventa  $\forall x (A \vee B)$   
 $(\forall x A) \wedge B$  diventa  $\forall x (A \wedge B)$   
equivalente se B non contiene x
- ... e poi eliminarli usando la convenzione che le variabili libere sono quantificate universalmente

$\forall x (\text{Animale}(F(x)) \wedge \neg \text{Ama}(x, F(x))) \vee \text{Ama}(G(x), x)$

$(\text{Animale}(F(x)) \wedge \neg \text{Ama}(x, F(x))) \vee \text{Ama}(G(x), x)$

## Trasformazione: passo 6

### 6. Forma normale congiuntiva (congiunzione di disgiunzioni di letterali):

$A \vee (B \wedge C)$  diventa  $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$(\text{Animale}(F(x)) \wedge \neg \text{Ama}(x, F(x))) \vee \text{Ama}(G(x), x)$

$(\text{Animale}(F(x)) \vee \text{Ama}(G(x), x)) \wedge$

$(\neg \text{Ama}(x, F(x)) \vee \text{Ama}(G(x), x))$

## Trasformazione: passo 7

### 7. Notazione a clausole:

$(\text{Animale}(F(x)) \vee \text{Ama}(G(x), x)) \wedge$

$(\neg \text{Ama}(x, F(x)) \vee \text{Ama}(G(x), x))$

$\{\text{Animale}(F(x)), \text{Ama}(G(x), x)\}$

$\{\neg \text{Ama}(x, F(x)), \text{Ama}(G(x), x)\}$

## Trasformazione: passo 8

8. Separazione delle variabili: clausole diverse, variabili diverse

Nota:  $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x_1 P(x_1) \wedge \forall x_2 Q(x_2)$

$\{\text{Animale}(F(x)), \text{Ama}(G(x), x)\}$

$\{\neg \text{Ama}(x, F(x)), \text{Ama}(G(x), x)\}$

$\{\text{Animale}(F(x_1)), \text{Ama}(G(x_1), x_1)\}$

$\{\neg \text{Ama}(x_2, F(x_2)), \text{Ama}(G(x_2), x_2)\}$

NOTA: tutti i passi meno la Skolemizzazione preservano l'equivalenza delle formule.

$P(a) \models \exists x P(x)$       ma     $\exists x P(x) \not\models P(a)$

## Forma normale implicativa

Forma normale implicativa (forse più intuitiva)

$\neg P_1 \vee \dots \vee \neg P_k \vee Q_1 \vee \dots \vee Q_n$

$\neg(P_1 \wedge \dots \wedge P_k) \vee Q_1 \vee \dots \vee Q_n$

$P_1 \wedge \dots \wedge P_k \Rightarrow Q_1 \vee \dots \vee Q_n$

Caso particolare (un solo letterale positivo)

$P_1 \wedge \dots \wedge P_k \Rightarrow Q$

Forma a regole come in programmazione logica o nelle basi di dati deduttive

## Unificazione: definizione

- *Unificazione*: operazione mediante la quale si determina se due espressioni possono essere rese identiche mediante una sostituzione di termini alle variabili
- Il risultato è la sostituzione che rende le due espressioni identiche, detta *unificatore*, o FAIL, se le espressioni non sono unificabili

## Sostituzione

- *Sostituzione*: un insieme finito di associazioni tra variabili e termini, in cui ogni variabile compare una sola volta sulla sinistra.  
Es.  $\{x_1/A, x_2/f(x_3), x_3/B\}$   
A va sostituita a  $x_1$ ,  $f(x_3)$  va sostituito a  $x_2$  ...  
Es.  $\{x/g(y), y/z, z/f(x)\}$
- Nota: sulla sinistra solo variabili

## Applicazione di sostituzione

Sia  $\sigma$  una sostituzione, A un'espressione:

- $A\sigma$  istanza generata dalla sostituzione (delle variabili con le corrispondenti espressioni)

Esempi.

$P(x, x, y, v)\{x/A, y/f(B), z/w\} = P(A, A, f(B), v)$

$Q(x, y, z)\{x/g(y), y/z, z/f(x)\} = Q(g(y), z, f(x))$

Nota: le variabili vengono sostituite simultaneamente e si esegue un solo passo di sostituzione

## Espressioni unificabili

- *Espressioni unificabili*: se esiste una sostituzione che le rende identiche (*unificatore*)  
Es.  $P(A, y, z)$  e  $P(x, B, z)$  sono unificabili con  
 $\tau = \{x/A, y/B, z/C\}$
- $\tau$  è un unificatore, ma non l'unico ... un altro è  
 $\sigma = \{x/A, y/B\}$
- $\sigma$  è *più generale* di  $\tau$  (istanza 'meno')
- vorremmo l'*unificatore più generale* di tutti (MGU)
- Teorema: l'unificatore più generale è unico, a parte i nomi delle variabili (l'ordine non conta).

## Composizione di sostituzioni

- Siano  $\sigma$  e  $\tau$  due sostituzioni:  
 $\sigma = [t_1/x_1, \dots, t_k/x_k]$  e  $\tau = [s_1/y_1, \dots, s_n/y_n]$
- $\sigma\tau' = [t_1\tau/x_1, \dots, t_k\tau/x_k, s_1/y_1, \dots, s_n/y_n]$
- Eliminare da  $\sigma\tau'$  le identità (Es.  $x/x$ ) e le coppie  $s_i/y_i$  tali che  $y_i \in \{x_1, \dots, x_k\}$ , ottenendo così  $\sigma\tau$
- Es.  $\sigma = [g(x, y)/w, x/y]$      $\tau = [y/x, B/w, C/z]$ 
  - $\sigma\tau' = [g(y, y)/w, y/y, y/x, B/w, C/z]$
  - $\sigma\tau = [g(y, y)/w, y/x, C/z]$

## Unificatore più generale

- L'unificatore più generale  $\gamma$  (MGU): è tale che ogni altro unificatore può essere ottenuto componendo  $\gamma$  con qualche sostituzione:  
 $\forall \sigma \exists \delta$  tale che  $\gamma\delta = \sigma$
- Es. l'MGU di  $P(A, y, z)$  e  $P(x, y, v)$  è  $[A/x, z/v]$ ;  
 un altro unificatore è  
 $[A/x, B/y, z/v] = [A/x, z/v][B/y]$

## Algoritmo di unificazione [Martelli, Montanari, 1982]

- Calcola l'MGU mediante un sistema a regole
- All'inizio la memoria di lavoro (WM) contiene l'equazione che corrisponde all'uguaglianza delle due espressioni da unificare
- Le regole modificano le equazioni presenti nella WM
- Si termina con fallimento o quando non ci sono più regole applicabili (successo)
- In caso di successo alla fine la WM contiene l'MGU
- Nota: diverso dall'algoritmo di unificazione di AIMA

## Algoritmo di unificazione: le regole

- $f(s_1, \dots, s_n) = f(t_1, \dots, t_n) \rightarrow s_1 = t_1, \dots, s_n = t_n$
  - $f(s_1, \dots, s_n) = g(t_1, \dots, t_m) \rightarrow$  fail se  $f \neq g$  o  $n \neq m$
  - $x = x \rightarrow$  cancella
  - $t = x \rightarrow x = t$
  - $x = t, x$  non occorre in  $t \rightarrow$  applica  $\{x/t\}$  a tutte le altre equazioni
  - $x = t, t$  non è  $x, x$  occorre in  $t \rightarrow$  fail (occur check)
- Nota: come caso particolare della 2, quando  $n=m=0$ , si fallisce su due costanti diverse

## Algoritmo di unificazione: esempio 1

- Calcolo dell'MGU tra  $P(A, y, z)$  e  $P(x, B, z)$

Passo 3  
 $x = A$   
 $y = B$   
 MGU!

## Algoritmo di unificazione: esempio 2

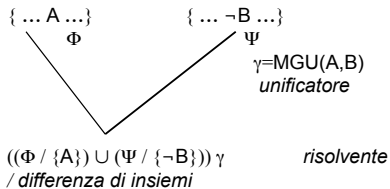
- Calcolo dell'MGU tra  $P(f(x), x)$  e  $P(z, z)$

Passo 3  
 $z = f(x)$   
 $x = f(x)$  regola 6  
 FAIL!  
 (occur check)

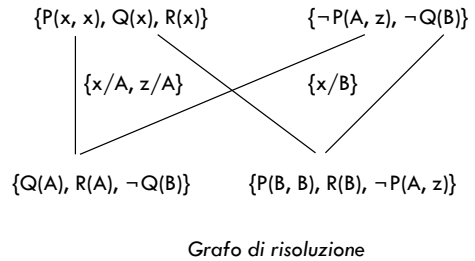


## Il metodo di risoluzione per il FOL

- Siamo ora in grado di definire in generale la regola di risoluzione per FOL

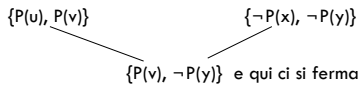


## Risoluzione: esempio

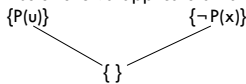


## Problema dei fattori

- Le seguenti clausole dovrebbero produrre la clausola vuota invece ...



- Se un sottoinsieme dei letterali di una clausola può essere unificato allora la clausola ottenuta dopo tale unificazione si dice *fattore* della clausola originaria.
- Il metodo di risoluzione va applicato ai *fattori* delle clausole:



## Completezza del metodo di risoluzione

- La deduzione per risoluzione è *corretta*  
Correttezza: Se  $\Gamma \vdash_{\text{RES}} A$  allora  $\Gamma \models A$
- La deduzione per risoluzione *non* è completa: può essere  $\Gamma \models A$  e non  $\Gamma \vdash_{\text{RES}} A$

Es.  $\{ \} \models \{P, \neg P\}$  ma non  $\{ \} \vdash_{\text{RES}} \{P, \neg P\}$

## Risoluzione per refutazione

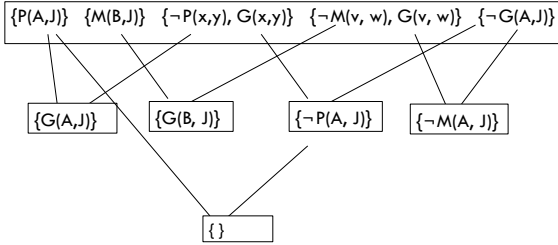
- Il *teorema di refutazione* ci suggerisce un metodo alternativo *completo*
- *Teorema di refutazione:*  
 $\Gamma \cup \{ \neg A \}$  è insoddisfacibile sse  $\Gamma \models A$
- *Teorema:*  $\Gamma$  è insoddisfacibile sse  $\Gamma \vdash_{\text{RES}} \{ \}$   
(la risoluzione è completa rispetto alla refutazione)

Abbiamo un metodo *meccanizzabile, corretto e completo*: basta aggiungere il negato della formula da dimostrare e provare a generare la clausola vuota

## Esempio di refutazione

1.  $\{P(A, J)\}$
  2.  $\{M(B, J)\}$
  3.  $\{\neg P(x, y), G(x, y)\}$  KB
  4.  $\{\neg M(v, w), G(v, w)\}$
  - Goal:  $G(A, J)$ ?
- } A è padre di J  
B è madre di J  
padre implica genitore  
madre implica genitore  
A è genitore di J?
- Aggiungiamo a KB la negazione del goal e proviamo a dedurre la clausola vuota
  - 5.  $\{ \neg G(A, J) \}$

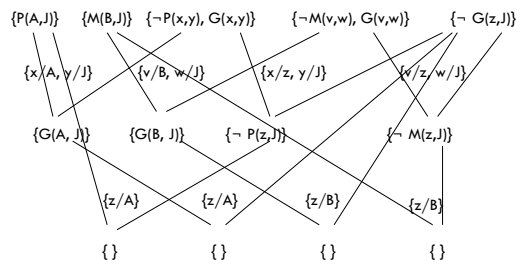
### Esempio di refutazione: il grafo



### Refutazione per domande di tipo "trova ..."

- Esempio: "Chi sono i genitori di J?"
- Si cerca di dimostrare che  $\exists z G(z, J)$
- Clausola goal:  $FC(\neg \exists z G(z, J)) \rightarrow \{ \neg G(z, J) \}$
- La risposta sono tutti i possibili legami per z che consentono di ottenere la clausola vuota (risposta calcolata)

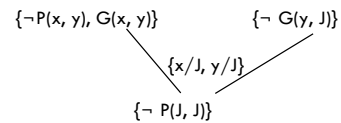
### Esempio



Le risposte sono: A, B

### Importante rinominare!

Osserva: è importante la restrizione che ogni clausola usi variabili diverse (anche quelle generate)



... e a questo punto non avremmo potuto ottenere la risposta unificando con  $P(A, J)$