Tecniche di Specifica e Dimostrazione

Prova scritta del 30 giugno 2008

(Recupero 1^o compitino: Esercizi 1 e 2 — Recupero 2^o compitino: Esercizi 3 e 4)

Esercizio 1 (9 punti)

Siano $VAR(b)$ le locazioni presenti nell'espressione booleana b e siano $AVAR(c)$ le locazioni *assegnate* nel comando c, cioè le variabili x che appaiono nel membro sinistro di qualche assegnamento $x =: a$ in c. Si definiscano $VAR(b)$ e $AVAR(c)$ e si dimostrino, nell'ordine, le seguenti tre proprietà, considerando i casi più significativi:

$$\forall x \in VAR(b).\sigma(x) = \sigma'(x) \quad \text{implica} \quad \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma'$$

$$\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \neq \bot \quad \text{implica} \quad \forall x \notin AVAR(c).(\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma)(x) = \sigma(x)$$

$$VAR(b) \cap AVAR(c) = \emptyset \ \wedge \ \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma \neq \bot \quad \text{implica} \quad \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma = \mathcal{B}[\![b]\!](\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma).$$

Si dimostri infine che:

$$VAR(b) \cap AVAR(c) = \emptyset \quad \text{implica} \quad \mathcal{C}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]\sigma = \bot \ \vee \ \mathcal{C}[\![\textbf{while } b \textbf{ do } c]\!]\sigma = \sigma.$$

Esercizio 2 (6 punti)

Si consideri la struttura $< S, \subseteq >$, dove S è la classe delle relazioni di *equivalenza parziale* R sui numeri naturali (cioe' relazioni $R \subseteq \omega \times \omega$ dotate delle proprietà antiriflessiva $(n, n) \notin R$, simmetrica e transitiva) e $R_1 \subseteq R_2$ è l'inclusione tra relazioni viste come insiemi di coppie.
Si dimostri che l'ordinamento parziale $< S, \subseteq >$ e' un ordinamento parziale completo con bottom.
Si considerino quindi le *partizioni parziali* cioè gli insiemi di sottoinsiemi disgiunti di ω. Possono essere messi in corrispondenza biunivoca con le relazioni di equivalenza parziale? E con le relazioni di equivalenza ordinarie?

Esercizio 3 (9 punti)

Data una funzione monotona $f : N_\bot \rightarrow N_\bot$ si dimostri che $f\bot = f(f\bot)$.
Dato quindi il termine HOFL $t_1 = rec\ f.\lambda x.(t\ (f\ x))$, con $t : int \rightarrow int$ chiuso, se ne calcoli il tipo più generale e si dimostri, utilizzando il risultato precedente, che $[\![t_1]\!]\rho = [\![t_2]\!]\rho$, con $t_2 = rec\ f.\lambda x.(t\ rec\ y.y)$.

Esercizio 4 (6 punti)

Si faccia vedere quali sono i processi raggiungibili da $p = ((rec\ x.\alpha x)|(rec\ x.\overline{\alpha}.x|\beta.nil))\backslash\alpha$ e da $q = rec\ x.\beta x$ e si dimostri che p e q non sono bisimilari strong ma sono bisimilari weak. Per semplicità si assumano gli assiomi strutturali $p|q = q|p$, $(p|q)|r = p|(q|r)$ e $p|nil = p$.