Tecniche di Specifica e Dimostrazione

Prova scritta del 31 marzo 2008

Esercizio 1 (10 punti)

Dato il comando

$$\mathrm{c} = \textbf{while } x \neq 0 \textbf{ do } (x := x - 1\ ;\ y := y + 1\ ;\ z =: z \times y)$$

si dimostri che, per ogni $\sigma, \sigma' \in \Sigma$,

$$\langle c, \sigma \rangle \to \sigma' \text{ implies } \sigma(y) > 0 \Rightarrow \sigma(x) \geq 0 \ \wedge\ \sigma' = \sigma[0/x, \sigma(y)+\sigma(x)/y, n/z]$$
$$\text{con } n = \sigma(z)(\sigma(y)+\sigma(x))!/\sigma(y)!$$

mentre

$$\sigma(x) < 0 \Rightarrow \langle c, \sigma \rangle \not\to.$$

Esercizio 2 (11 punti)

Si consideri l'insieme $(\omega \cup \{\infty\}) \times (\omega \cup \{\infty\})$ delle coppie di numeri naturali più ∞ con l'ordinamento lessicografico $\sqsubseteq$ definito come

$$(x_1, y_1) \sqsubseteq (x_2, y_2) \text{ se } x_1 < x_2 \text{ oppure se } x_1 = x_2 \text{ e } y_1 \leq y_2$$

dove al solito l'ordinamento $\leq$ sui naturali è esteso con $x \leq \infty$.

Si dimostri che $\sqsubseteq$ è un ordinamento parziale completo con bottom. Si considerino esplicitamente tutti i possibili tipi di catene dimostrando in ogni caso l'esistenza del lub. Dato poi l'ordinamento parziale $\omega \times \omega$ con lo stesso erdinamento, si dimostri che la funzione binaria $sum((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ è monotona, mentre la funzione binaria $max((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = (max(x_1, x_2), max(y_1, y_2))$ non lo è.

Esercizio 3 (9 punti)

Si consideri il frammento IMP^- del linguaggio IMP in cui il l'espressione aritmetica $a ::= x$ sia eliminata. Si fornisca quindi per ricorsione strutturale una semantica denotazionale $\mathcal{A}\{\!|a|\!\}$ delle espressioni aritmetiche, $\mathcal{B}\{\!|a|\!\}$ delle espressioni booleane e $\mathcal{C}\{\!|c|\!\}$ dei comandi in cui i domini semantici siano rispettivamente gli interi, i booleani e il dominio $\{\top, \bot\}$, con $\bot \sqsubseteq \top$, dimostrando che vale per tutti le memorie σ:

$$\mathcal{A}\{\!|a|\!\} = \mathcal{A}[\![a]\!]\sigma,\ \mathcal{B}\{\!|b|\!\} = \mathcal{B}[\![b]\!]\sigma \text{ e } \mathcal{C}\{\!|c|\!\} \sim \mathcal{C}[\![c]\!]\sigma$$

dove $x \sim y$ significa $x = \bot \Leftrightarrow y = \bot$.