Tecniche di Specifica e Dimostrazione

Prova scritta dell'1 giugno 2009

(Recupero 1^o compitino: Esercizi 1 e 2 — Recupero 2^o compitino: Esercizi 3 e 4)

Esercizio 1 (8 punti)

Si estenda il linguaggio **IMP** con l'espressione di *scelta guardata* **choose** b_0 **then** c_0 | b_1**then** c_1. Si possono dare due diverse semantiche del nuovo costrutto, definite con le seguenti regole:

$$\frac{\langle b_0,\sigma\rangle \to true \quad \langle c_0,\sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \textbf{choose}\ b_0\ \textbf{then}\ c_0 \mid b_1 \textbf{then}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'} \qquad \frac{\langle b_1,\sigma\rangle \to true \quad \langle c_1,\sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \textbf{choose}\ b_0\ \textbf{then}\ c_0 \mid b_1 \textbf{then}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

oppure

$$\frac{\langle b_0,\sigma\rangle \to true \quad \langle c_0,\sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \textbf{choose}\ b_0\ \textbf{then}\ c_0 \mid b_1 \textbf{then}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'} \qquad \frac{\langle b_0,\sigma\rangle \to false \quad \langle b_1,\sigma\rangle \to true \quad \langle c_1,\sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \textbf{choose}\ b_0\ \textbf{then}\ c_0 \mid b_1 \textbf{then}\ c_1, \sigma\rangle \to \sigma'}.$$

Per entrambe le semantiche: (i) si faccia vedere se il teorema dimostrato a lezione:

$$\langle c,\sigma\rangle \to \sigma' \ \text{ and } \ \langle c,\sigma\rangle \to \sigma'' \ \text{ implies } \ \sigma' = \sigma''$$

continua a valere, e in caso contrario si mostri un controesempio; (ii) si fornisca, se possibile (!), la corrispondente semantica denotazionale utilizzando gli stessi domini semantici visti a lezione; (iii) infine si definisca la semantica denotazionale ordinaria del comando **if_then_else** in termini di quella del costrutto guardato.

Esercizio 2 (7 punti)

Si consideri il dominio $D(S,V) = S \to 2^{V^*}$ delle funzioni dall'insieme S agli insiemi $L \subseteq V^*$ di stringhe sull'alfabeto V. Basandosi sui domini funzionali per HOFL, e tenendo conto che 2^{V^*} è ordinato per inclusione, si ricordi come sono definiti l'ordinamento parziale di $D(S,V)$, il suo elemento bottom e i limiti delle sue catene.

Un *sistema di transizione finito* è definito come una coppia $\langle Q, \to\rangle$ dove $Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$ è un insieme di *stati* e $\to \subseteq Q \times Q$ è la relazione di *transizione*.

Si consideri ora il dominio $D(Q,Q) = Q \to 2^{Q^*}$ e la funzione $F : D(Q,Q) \to D(Q,Q)$, che data la funzione $f : Q \to 2^{Q^*}$ che associa ad ogni stato q un insieme di cammini nel sistema di transizione ritorna la funzione $Ff : Q \to 2^{Q^*}$ definita dalle regole

$$\frac{\alpha \in fq \quad q' \to q}{q'\alpha \in Ffq'} \qquad \frac{}{q \in Ffq}.$$

Si dimostri che F è (i) monotona (ii) (facoltativo) continua. Si ricordi che $Ffq = (Ff)q$.

Si consideri l'esempio $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$, $q_1 \to q_2, q_2 \to q_3, q_3 \to q_1$, e si calcolino le prime approssimazioni di $fix(F)$, concludendo che $f^k q$, essendo $f^k = F^k \bot$ la k-esima approssimazione di $fix(F)$, contiene i cammini in uscita da q che visitano al più k nodi, $k = 1, 2 \ldots$.

Esercizio 3 (9 punti)

Data le equazioni dei numeri di Fibonacci:

$$F(0) = 1 \quad F(1) = 1 \quad F(n+2) = F(n+1) + F(n)\ n = 0, 1, \ldots.$$

si dica se si tratta di una definizione per ricorsione ben fondata e per quale relazione ben fondata.

Si scriva quindi un termine HOFL $t\colon int \to int$ per F, si faccia vedere che è ben tipato, si calcoli la semantica operazionale di $(t\ 2)$ e la semantica denotazionale $[\![t]\!]\rho$ (senza calcolare esplicitamente il punto fisso). Infine si dimostri che quest'ultima soddisfa le equazioni viste sopra, concludendo che la funzione calcolata da t è corretta. (Cenno: si valuti $[\![(t\ 0)]\!]\rho$, $[\![(t\ 1)]\!]\rho$ e $[\![(t\ n+2)]\!]\rho$ sfruttando il fatto che $[\![t]\!] = \Gamma[\![t]\!]$.)

Esercizio 4 (6 punti)

Si dimostri per induzione strutturale su agenti CCS p con solo nil, prefisso e somma che $p \xrightarrow{\mu} q \ \Rightarrow\ \varphi(p) \xrightarrow{\varphi(\mu)} \varphi(q)$ con φ permutazione di nomi. Si dimostri quindi che $p \simeq q$ implica $\varphi(p) \simeq \varphi(q)$.