Tecniche di Specifica e Dimostrazione

Prova scritta del 7 luglio 2009

(Recupero 1^o compitino: Esercizi 1 e 2 — Recupero 2^o compitino: Esercizi 3 e 4)

Esercizio 1 (8 punti)

Una *memoria parziale* è una funzione $\rho : \Sigma_p = Loc \to N_\perp$ che formalizza la nozione di modifica finita di una memoria. Il *dominio* di ρ è definito come $dom(\rho) = \{x | \rho(x) \neq \perp\}$ ed è assunto finito. Una operazione binaria di composizione $\_\,\_ : \Sigma \times \Sigma_p \to \Sigma$ è definita come $(\sigma\rho)(x) \ = \ \rho(x) = n \to n, \sigma(x)$. Ad esempio, se $\rho = \lambda y.\ y = x \to n, \perp$, allora $\sigma\rho = \sigma[n/x]$. In modo identico è definita una funzione $\_\,\_ : \Sigma_p \times \Sigma_p \to \Sigma_p$.

Si dimostri che $dom(\rho_1\rho_2) = dom(\rho_1) \cup dom(\rho_2)$ e che $(\sigma\rho_1)\rho_2 = \sigma(\rho_1\rho_2)$. Utilizzando tali proprietà si dimostri infine che $\langle c, \sigma\rangle \to \sigma'$ implica $\sigma' = \sigma\rho$ per qualche ρ, con $dom(\rho) \subseteq loc(c)$, essendo $loc(c)$ le locazioni presenti in c.

Esercizio 2 (7 punti)

Data la grammatica libera

$$S ::= aB \mid bA \qquad A ::= a \mid aS \mid bAA \qquad B ::= b \mid bS \mid aBB$$

si costruisca il corrispondente sistema di inferenza R in cui le formule ben formate sono del tipo $X \ni \alpha$, dove X è un nonterminale della grammatica e α è una stringa sull'alfabeto $\{a, b\}$. Alla produzione $S ::= aB$ corrisponde ad esempio la regola di inferenza $\dfrac{B \ni \alpha}{S \ni a\alpha}$.

Si consideri il corrispondente operatore delle conseguenze immediate $\hat{R}$ e lo si applichi all'insieme di formule ben formate $\{B \ni \alpha \mid \alpha \in a^*\}$. Si costruisca quindi la terza approssimazione $\hat{R}^3(\perp)$ del punto fisso.

Si dimostri infine mediante contenimento in entrambi i sensi che

$$\begin{array}{rll} fix(\hat{R}) = & \{S \ni \alpha \mid |\alpha|_a = |\alpha|_b \neq 0\} & \cup \\ & \{A \ni \alpha \mid |\alpha|_a = |\alpha|_b + 1\} & \cup \\ & \{B \ni \alpha \mid |\alpha|_a + 1 = |\alpha|_b\} & \end{array}$$

dove $|\alpha|_a$ è il numero di a che appaiono nella stringa α.

Esercizio 3 (9 punti)

Dato il termine $t = rec\ f.\lambda x.\mathbf{if}\ x\ \mathbf{then}\ 1\ \mathbf{else}\ (g\ (f\ (x-1)))$ se ne calcoli il tipo e la semantica denotazionale $[\![t]\!]\rho$, assumendo che $\rho g = \lfloor h \rfloor$. Si consideri quindi il termine $(((\lambda g.t)\ \lambda x.x)\ 1)$ e se ne calcoli la forma canonica. Sarebbe possibile calcolare la forma canonica di t?

Esercizio 4 (6 punti)

Si aggiunga al CCS un nuovo costrutto $!p$ detto *replicatore* definito dalla regola di inferenza:

$$\frac{!p \mid p \xrightarrow{\mu} q}{!p \xrightarrow{\mu} q}.$$

Si dimostri che $!(\alpha.nil + \overline{\alpha}.nil) \simeq rec\ x.(x|(\alpha.nil + \overline{\alpha}.nil))$.

Si consideri quindi la definizione alternativa

$$\frac{p \xrightarrow{\mu} q}{!'p \xrightarrow{\mu} !'p \mid q}$$

e si dimostri con un controesempio che $!'(\alpha.nil + \overline{\alpha}.nil) \not\simeq rec\ x.(x|(\alpha.nil + \overline{\alpha}.nil))$.