Tecniche di Specifica e Dimostrazione

Prova scritta del 13 gennaio 2009

Esercizio 1 (12 punti)

Si estenda *IMP* con comandi definiti ricorsivamente:

$$c \ ::= \ \ldots \,|\, x \,|\, \mathbf{rec}\, x.c$$

ridefinendo gli stati come $\Sigma' \ = \ Loc \to (N \cup (\Sigma \to \Sigma_\perp))$. La semantica denotazionale dei nuovi comandi è definita come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[\![x]\!]\sigma = \ & \sigma(x) \\ \mathcal{C}[\![\mathbf{rec}\, x.c]\!] = \ & \mathbf{fix}\, \lambda f.\lambda\sigma.\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma[f/x]. \qquad\qquad (a) \end{aligned}$$

1. Si dimostri che il nuovo costrutto estende il *while*, cioè

$$\mathcal{C}[\![w]\!] = \mathcal{C}[\![\mathbf{while}\, b\, \mathbf{do}\, c]\!] \qquad \text{per} \quad w = \mathbf{rec}\, x.\, \mathbf{if}\, b\, \mathbf{then}\, c; x\, \mathbf{else}\, \mathbf{skip}.$$

2. Si fornisca la regola operazionale per $\mathbf{rec}\, x.c$. (Cenno: si ricordi la semantica operazionale di HOFL.) Assumendo $\mathbf{rec}\, x.c = w$ si ricavino quindi le regole del *while*.
3. Si enunci, senza dimostrarlo, il lemma di sostituzione per *IMP* esteso.
4. Si dimostri per il nuovo costrutto che $< c, \sigma > \to \sigma'$ implica $\mathcal{C}[\![c]\!]\sigma = \sigma'$.
5. Si accenni alla dimostrazione che il punto fisso in *(a)* esiste effettivamente.

Esercizio 2 (7 punti)

Si consideri l'insieme PI delle funzioni parziali iniettive da ω a ω, con l'ordinamento $\sqsubseteq$ visto a lezione (inclusione degli insiemi di coppie, cioe' $f \sqsubseteq g$ se $Gr(f) \subseteq Gr(g)$, con $Gr(h) = \{< x, y > | h(x) = y\}$). Se identifichiamo una funzione f con il suo grafo $Gr(f)$, abbiamo che f parziale iniettiva significa che $< x, y >, < x, y' > \in f \Rightarrow y = y'$ e $< x, y >, < x', y > \in f \Rightarrow x = x'$.

Si dimostri quindi che $(PI, \sqsubseteq)$ e' un ordinamento parziale completo.

Si dimostri infine che la funzione $F : \ PI \to PI$ con $F(f) = \{< 2x, y > \mid < x, y > \in f\}$ e' monotona continua.

(Cenno: Si consideri F come calcolata dall'operatore $\hat{R}$ delle conseguenze immediate con R costituito dalla sola regola $< x, y > / < 2x, y >$.)

Esercizio 3 (5 punti)

Si verifichi se il seguente termine HOFL è tipabile, e in caso positivo se ne fornisca il tipo:

$$\lambda x.\ \lambda y.\ \lambda z.\ \mathbf{if}\ z\ \mathbf{then}\ (y\, x)\ \text{else}\ (x\, y).$$

Esercizio 4 (6 punti)

Per gli agenti CCS

$$p \ = \ rec\ x.(\alpha.rec\ y.(\beta.y + \alpha.rec\ z.(\beta.z + \alpha.x))) \quad q \ = \ rec\ x.(\alpha.rec\ y.(\beta.y + \alpha.y + \alpha.x))$$

si ricavino, utilizzando le regole di inferenza, tutte le possibili transizioni. Si provi quindi che p e q non sono bisimilari e si mostri una formula della logica Hennessy-Milner che distingua tra di essi.