Models of Computation

Written Exam on January 13, 2014

Exercise 1 (6)

Si consideri il comando:

$$w \; = \; \textbf{while } x < y \textbf{ do} \, (\, x := x + 1; \, y := y + 1 \,).$$

Si dimostri che, per ogni $\sigma, \sigma' \in \Sigma$ con $\langle w, \sigma \rangle \to \sigma'$,

$$\text{se} \;\; \sigma(x) \geq \sigma(y) \quad \text{allora} \quad \sigma' = \sigma.$$

Si dimostri quindi, utilizzando la regola di inferenza vista a lezione, che

$$\text{se} \;\; \sigma(x) < \sigma(y) \quad \text{allora} \quad \langle w, \sigma \rangle \not\to.$$

Exercise 2 (8)

Si consideri l'insieme Ch, ordinato per inclusione, formato da certi insiemi S di elementi appartenenti ad un ordinamento parziale $(D, \sqsubseteq)$. Per essere $S \in Ch \subseteq \mathcal{P}(D)$, un insieme $S \subseteq D$ deve essere *chiuso verso il basso*, cioè se $s \in S$ e $s' \sqsubseteq s$ allora anche $s' \in S$.

Si dimostri che $(Ch, \subseteq)$ è un ordinamento parziale completo con bottom. Si consideri quindi la funzione

$$F : \mathcal{P}(D) \to Ch \qquad \text{definita come} \qquad F(I) = \{ s \mid s \sqsubseteq s', \; s' \in I \}$$

e si faccia vedere che effettivamente $F(I) \in Ch$. Si dimostri infine che F è monotona continua, dove anche l'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ delle parti di D è ordinato per inclusione.

Exercise 3 (6)

Si consideri il termine HOFL lazy

$$snd(((\lambda y. \; y) \; (((rec \; f. \; \lambda x. \; (f \; x)) \; 3) \; , \; 2))).$$

Se ne calcoli il tipo, la forma canonica e la semantica denotazionale.

Exercise 4 (5)

Per gli agenti CCS

$$p \; = \; ((\alpha.nil + \tau.\beta.nil) | \overline{\alpha}.\gamma.nil) \backslash \alpha \backslash \beta \qquad q \; = \; ((\alpha.nil + \beta.nil) | \overline{\alpha}.\gamma.nil) \backslash \alpha \backslash \beta$$

si ricavino, utilizzando le regole di inferenza, tutte le possibili transizioni. Si provi quindi che p e q non sono bisimilari e si mostri una formula della logica Hennessy-Milner che distingua tra di essi.

Exercise 5 (5)

Consider the following PEPA program P with infinite states $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \{0,1\}^*}$:

$$A_\epsilon \;\; \text{where} \;\; A_\alpha = (a, \lambda) A_{\alpha 0} + (a, \lambda) A_{\alpha 1}.$$

Thus for instance $A_\epsilon = (a, \lambda) A_0 + (a, \lambda) A_1$, $A_0 = (a, \lambda) A_{00} + (a, \lambda) A_{01}$ and so on. Draw (!) the transition system of P, find the reachable states from A_ϵ and determine the bisimilar states. Finally, find the smallest PEPA program bisimilar to P.

Correzione Scritto del 13 gennaio 2014

Esercizio 1

Prima parte

Per induzione sulle regole

$P(\langle w, \sigma\rangle \to \sigma') \stackrel{def}{=} \sigma(x) \geq \sigma(y) \Rightarrow \sigma' = \sigma$

$$\frac{\langle x < y, \sigma\rangle \to false}{\langle w, \sigma\rangle \to \sigma}$$

assumiamo la premessa: $\sigma(x) \geq \sigma(y)$

da dimostrare $P(\langle w, \sigma\rangle \to \sigma) \stackrel{def}{=} \sigma(x) \geq \sigma(y) \Rightarrow \sigma = \sigma$

ovvio

$$\frac{\sigma(x) < \sigma(y) \quad \langle x := x+1; y := y+1, \sigma\rangle \to \sigma'' \quad \langle w, \sigma''\rangle \to \sigma'}{\langle w, \sigma\rangle \to \sigma'}$$

Assumiamo:

$\sigma(x) < \sigma(y)$

$P(\langle w, \sigma\rangle \to \sigma') \stackrel{def}{=} \sigma(x) \geq \sigma(y) \stackrel{?}{\Rightarrow} \sigma' = \sigma''$ da dimostrare.

Ovvio, essendo la premessa falsa.

Seconda parte

Si usa la regola

$$\frac{\sigma\in S,\ \langle c,\sigma\rangle\to\sigma' \Rightarrow \sigma'\in S \qquad \sigma\in S \Rightarrow \langle b,\sigma\rangle\to \text{true}}{\sigma\in S \Rightarrow \langle \text{while } b \text{ do } c,\ \sigma\rangle \not\to}$$

Nel nostro caso: $S=\{\sigma \mid \sigma(x)<\sigma(y)\}$

Prima prova

$\sigma\in S,\ \langle c,\sigma\rangle\to\sigma' \overset{?}{\Rightarrow} \sigma'\in S$

Assumiamo $\sigma\in S$, cioè $\sigma(x)<\sigma(y)$
Assumiamo $\langle x:=x+1;\ y:=y+1,\ \sigma\rangle\to\sigma'$
Cioè $\sigma'=\sigma\left[{}^{\sigma(x)+1}/_{x},\ {}^{\sigma(y)+1}/_{y}\right]$
Da dimostrare: $\sigma'\in S$ cioè $\sigma'(x)\overset{?}{<}\sigma'(y)$
Ovvio, essendo $\sigma'(x)=\sigma(x)+1$ e $\sigma'(y)=\sigma(y)+1$.

Seconda prova

$\sigma\in S \overset{?}{\Rightarrow} \langle b,\sigma\rangle\to \text{true}$ cioè

$\sigma(x)<\sigma(y) \Rightarrow \langle x<y,\ \sigma\rangle\to \text{true}$ ovvio.

Esercizio 2

La relazione $(Cl_w, \subseteq)$ è un ordinamento parziale.
Infatti le proprietà:

$x \subseteq x$ riflessiva

$x \subseteq y, y \subseteq x \Rightarrow x = y$ antisimmetrica

$x \subseteq y, y \subseteq z \Rightarrow x \subseteq z$ transitiva

valgono tra gli elementi di Cl_w, che sono insiemi.

L'ordinamento parziale $(Cl_w, \subseteq)$ è dotato di bottom:
infatti l'insieme vuoto $\emptyset$ è chiuso verso il basso.
$s \in \emptyset$ e $s' \subseteq s \Rightarrow s' \in \emptyset$ è vero essendo falsa la premessa.

Per la completezza, va dimostrato che, data una catena di insiemi chiusi verso il basso:
$S_0 \subseteq S_1 \subseteq \dots$
anche il lub $\bigcup_{i \in \omega} S_i$ è chiuso verso il basso.

cioè: $s \in \bigcup_{i \in \omega} S_i$ e $s' \subseteq s \overset{?}{\Rightarrow} s' \in \bigcup_{i \in \omega} S_i$.

Infatti se $s \in \bigcup_{i \in \omega} S_i$ allora $s \in S_k$

Ma S_k è chiuso, quindi essendo $s' \subseteq s$ abbiamo $s' \in S_k$
Quindi $s' \in \bigcup_{i \in \omega} S_i$ cvd.

Per dimostrare $F(I) \in Ch$ va fatto vedere che

$$\bar{s} \in \{s \mid s \sqsubseteq s', s' \in I\},\ \bar{s}' \sqsubseteq \bar{s} \Rightarrow \bar{s}' \in \{s \mid s \sqsubseteq s', s' \in I\}$$

Infatti, se $\bar{s} \in \{s \mid s \sqsubseteq s', s' \in I\}$ esiste $s' \in I$ con $\bar{s} \sqsubseteq s'$
Ma allora, se $\bar{s}' \sqsubseteq \bar{s}$ anche $\bar{s}' \sqsubseteq s' \in I$, quindi $\bar{s}' \in \{s \mid s \sqsubseteq s', s' \in I\}$.

Per la monotonia di F, va dimostrato:

$$I_1 \subseteq I_2 \overset{?}{\Rightarrow} \{s \mid s \sqsubseteq s', s' \in I_1\} \subseteq \{s \mid s \sqsubseteq s', s' \in I_2\}$$

Assumendo $I_1 \subseteq I_2$, se $\bar{s} \in \{s \mid s \sqsubseteq s', s' \in I_1\}$
deve esistere $s' \in I_1$ con $\bar{s} \sqsubseteq s'$. Ma anche $s' \in I_2$ per l'ipotesi.
Quindi anche $\bar{s} \in \{s \mid s \sqsubseteq s', s' \in I_2\}$.

Per la continuità di F, va dimostrato, per ogni catena

$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ che vale $F(\bigcup_{i \in \omega} I_i) = \bigcup_{i \in \omega} F(I_i)$

Ma $s \in F(\bigcup I_i)$ implica che esiste $s' \in \bigcup I_i$ con $s \sqsubseteq s'$.
Quindi anche $s' \in I_k$ quindi $s \in F(I_k)$ e $s \in \bigcup F(I_i)$

Al contrario, se $s \in \bigcup F(I_i)$ allora $s \in F(I_k)$ ed
esiste $s' \in I_k$ con $s \sqsubseteq s'$. Quindi $s' \in \bigcup I_i$
e $s \in F(\bigcup I_i)$.

Esercizio 3

$$snd\ ((((\lambda y.y)(((rec\ f.\lambda x.(f\ x))\ 3),2)))) = t$$

$\tau_3 \quad \tau_3 \quad \tau_1\to\tau_2 \quad \tau_1 \quad \tau_1\to\tau_2 \quad \tau_1 \quad int \quad int$

$\tau_3\to\tau_3 \qquad \tau_2$

$\tau_1\to\tau_2$

$\tau_1 = int$

$\tau_1\to\tau_2$

τ_2

$\tau_2 * int \qquad \tau_3 = \tau_2 * int$

$\tau_2 * int$

int

$$t\to c \Leftarrow ((\lambda y.y)(((rec\ f.\lambda x.(f\ x))\ 3),2)) \to (t_1,t_2) \quad t_2\to c \Leftarrow$$

$$\Leftarrow y[(((rec\ f.\lambda x.(f\ x))\ 3),2)/y] \to (t_1,t_e) \quad t_2\to c \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (((rec\ f.\lambda x.(f\ x))\ 3),2) \to (t_1,t_2) \quad t_2\to c \Leftarrow$$

$$\Leftarrow 2\to c \xrightarrow{c=2} \square$$

$$[\![t]\!]\rho = \text{let } v \Leftarrow \left(\text{let } \varphi \Leftarrow \lfloor \lambda d.\, d \rfloor\, [\![(((\text{rec} f.\lambda x.(f x))\, 3),\, 2)]\!]\rho\right).\ \pi_2 v =$$

$$= \text{let } v \Leftarrow (\lambda d.\, d)\, \lfloor ([\![((\text{rec} f.\lambda x.(f x))\, 3)]\!],\, \lfloor 2 \rfloor) \rfloor .\ \pi_2 v =$$

$$= \text{let } v \Leftarrow \lfloor ([\![((\text{rec} f.\lambda x.(f x))\, 3)]\!],\, \lfloor 2 \rfloor) \rfloor .\ \pi_2 v =$$

$$= \pi_2 \left([\![((\text{rec} f.\lambda x.(f x))\, 3)]\!],\, \lfloor 2 \rfloor\right) = \lfloor 2 \rfloor$$

Esercizio 4

$$P = ((\alpha.nil + \tau.\beta.nil) \mid \bar{\alpha}.\gamma.nil)\backslash\alpha\backslash\beta \xrightarrow{\mu} P_1 \quad \longleftarrow \quad P_1 = P_2\backslash\alpha\backslash\beta$$

$$(\alpha.nil + \tau.\beta.nil) \mid \bar{\alpha}.\gamma.nil \xrightarrow{\mu} P_2 \qquad \mu \neq \alpha,\beta \quad \longleftarrow \frac{\mu = \tau}{P_2 = P_3 \mid P_4}$$

$$(\alpha.nil + \tau.\beta.nil) \xrightarrow{\lambda} P_3 \quad \bar{\alpha}.\gamma.nil \xrightarrow{\bar{\lambda}} P_4 \quad \longleftarrow$$

$$\alpha.nil \xrightarrow{\lambda} P_3 \quad \bar{\alpha}.\gamma.nil \xrightarrow{\bar{\lambda}} P_4 \quad \longleftarrow \frac{\lambda = \alpha}{P_3 = nil \;\; P_4 = \gamma.nil} \qquad \square$$

quindi

$$P \xrightarrow{\tau} (nil \mid \gamma.nil)\backslash\alpha\backslash\beta$$

similmente

$$q \xrightarrow{\tau} (nil \mid \gamma.nil)\backslash\alpha\backslash\beta$$

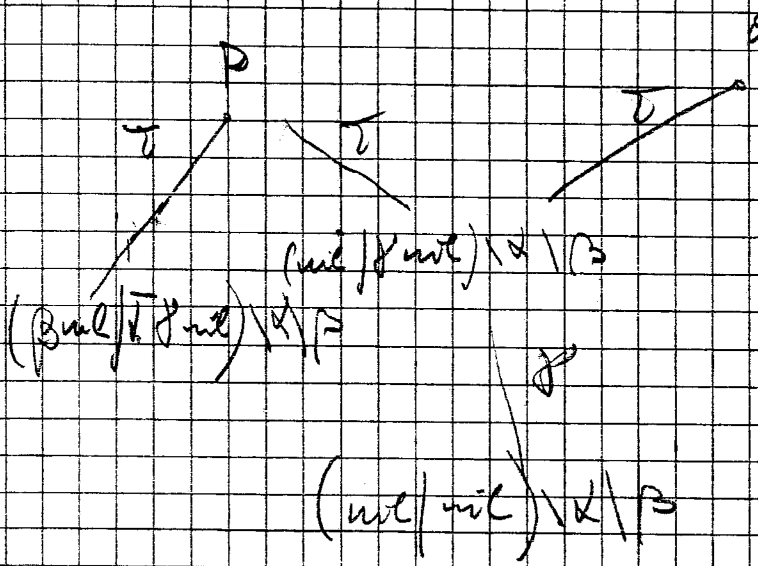
$$(\alpha.nil + \tau.\beta.nil) \mid \bar{\alpha}.\gamma.nil \xrightarrow{\mu} P_2 \quad \longleftarrow \quad P_2 = P_5 \mid \bar{\alpha}.\gamma$$

$$(\alpha.nil + \tau.\beta.nil) \xrightarrow{\mu} P_5 \quad \longleftarrow$$

$$\tau.\beta.nil \xrightarrow{\mu} P_5 \quad \longleftarrow \frac{\mu = \tau}{P_5 = \beta.nil} \qquad \square$$

quindi

$$P \xrightarrow{\tau} (\beta.nil \mid \bar{\alpha}.\gamma.nil)\backslash\alpha\backslash\beta$$



Alice : $p \xrightarrow{\tau} (\beta\,nil \mid \bar{\alpha}\,\gamma\,nil)\backslash\alpha\backslash\beta$

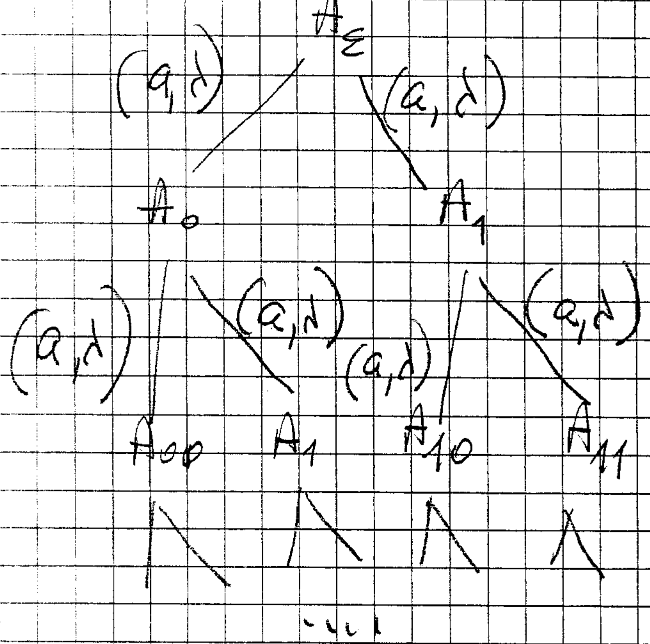
Bob : $q \xrightarrow{\tau} (nil \mid \gamma\,nil)\backslash\alpha\backslash\beta$

Alice : $(nil \mid \gamma\,nil)\backslash\alpha\backslash\beta \xrightarrow{\gamma} (nil \mid nil)\backslash\alpha\backslash\beta$

Bob : $(\beta\,nil \mid \bar{\alpha}\,\gamma\,nil)\backslash\alpha\backslash\beta \xrightarrow{?} ?$

$\langle\tau\rangle \neg \langle\gamma\rangle\, true$ Vera per p, falsa per q

Exercise 5



All the states A_α, $\alpha \in \{0,1\}^*$ are reachable from A_ε.
All states are bisimilar

The smallest PEPA program is

$$A \quad \text{where} \quad A = (a, 2\lambda)A$$